Materiale didactice suport
pentru pregătirea pentru examenul de bacalaureat
la disciplina

# *Matematică M2*

Elaborat de
Conf. univ. dr. Ovidiu Ciorîcă
Prof. univ. dr. Mihaela Neamțu

Material elaborat în cadrul proiectului CNFIS-FDI-2021-0471 „UVT – Acces și echitate în învățământul superior”

# Cuprins

# Capitolul I – Numere reale, partea întreagă, partea fracționară. Progresii. Numere complexe

## I.1. Breviar teoretic

### Formule de calcul prescurtat

- ✓ $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$;
- ✓ $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$;
- ✓ $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;
- ✓ $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$;
- ✓ $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$;
- ✓ $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$;
- ✓ $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

### Modulul unui număr real

- ✓ $|x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$;
- ✓ $|x| \geq 0$, pentru orice $x \in R$;
- ✓ $|x| = 0$ dacă și numai dacă $x = 0$;
- ✓ $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$, pentru orice $x, y \in R$;
- ✓ $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, pentru orice $x, y \in R, y \neq 0$;
- ✓ $|x+y| \leq |x| + |y|$, pentru orice $x, y \in R$, egalitatea are loc dacă și numai dacă $xy \geq 0$;
- ✓ $|x| \leq a$ dacă și numai dacă $x \in [-a, a], a > 0$;
- ✓ $|x| \geq a$ dacă și numai dacă $x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty), a > 0$.

### Partea intreagă și fracționară

Se numește **partea întreagă** a unui număr real x și notăm [x] cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu x.

- ✓ $[\boldsymbol{x}] \in \boldsymbol{Z}$, pentru orice $x \in R$;
- ✓ $[\boldsymbol{x}] \leq \boldsymbol{x} < [\boldsymbol{x}] + \mathbf{1}$, pentru orice $x \in R$;
- ✓ $[\boldsymbol{x}+\boldsymbol{k}] = [\boldsymbol{x}] + \boldsymbol{k}$, pentru orice $x \in R, k \in Z$.

Se numește **partea fracționară** a unui număr real x, x- [x] și se notează {x}

- ✓ $\{\boldsymbol{x}\} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1})$, pentru orice $x \in R$;
- ✓ $\{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{k}\} = \{\boldsymbol{x}\}$, pentru orice $x \in R, k \in Z$.

**Progresii aritmetice**

Se numește **progresie aritmetică** un șir de numere cu proprietatea că, fiecare număr, începând cu al doilea, se obține din precedentul adunând aceeași cantitate constantă numită **rație**.

Dacă $(a_n)_{n\in N^*}$ este o progresie aritmetică cu rația r, atunci:

- ✓ $a_{n+1} = a_n + r$, pentru orice $n \in N^*$;
- ✓ $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$, pentru orice $n \in N^*, n \geq 2$;
- ✓ $a_n = a_1 + (n-1)r$, pentru orice $n \in N^*$;
- ✓ $S_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2}$, unde $S_n$ este suma primilor n termeni.

**Progresii geometrice**

Se numește **progresie geometrică** un șir de numere cu proprietatea că, fiecare număr, începând cu al doilea, se obține din precedentul prin îmnulțirea cu aceeași cantitate constantă numită **rație**.

Dacă $(a_n)_{n\in N^*}$ este o progresie geometrică cu rația q, atunci:

- ✓ $b_{n+1} = qb_n$, pentru orice $n \in N^*$;
- ✓ $b_n = b_1 q^{n-1}$, pentru orice $n \in N^*,\ n \geq 2$;
- ✓ $b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1}$, pentru orice $n \in N^*$;
- ✓ $S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = b_1\frac{q^n-1}{q-1}$, unde $S_n$ este suma primilor n termeni și $q \neq 1$.

**Numere complexe**

Mulțimea numerelor complexe este

$$C = \{x + yi | x, y \in R, i^2 = -1\}$$

Dacă z=x+yi, atunci Re z=x, Im z=y.

- ✓ Spunem că două numere complexe $z_1 = x_1 + y_1 i$ și $z_2 = x_2 + y_2 i$ sunt egale dacă și numai dacă $x_1 = x_2, y_1 = y_2$.
- ✓ Conjugatul unui număr complex $z = x + yi$, se notează $\bar{z}$, se definește prin

$$\bar{z} = x - yi$$

  și are proprietățile:
  - ➢ $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$;
  - ➢ $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$;
  - ➢ $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$;
  - ➢ $\overline{z_1/z_2} = \overline{z_1}/\overline{z_2}, z_2 \neq 0$;
  - ➢ $z \in R$ dacă și numai dacă $z = \bar{z}$.

- ✓ Modulul unui număr complex $z = x + yi$ se notează $|z|$, se definește prin

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

și are proprietățile:

- $|z| \geq 0$, pentru orice $z \in C$;
- $|z| = 0$ dacă și numai dacă $z = 0$;
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, pentru orice $z_1, z_2 \in C$;
- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, pentru orice $z_1, z_2 \in C, z_2 \neq 0$;
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, pentru orice $z_1, z_2 \in C$;
- $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ pentru orice $z \in C$.

## I.2. Probleme rezolvate

**R.I.1.** Rezolvați in R ecuația:

$$|1 - \mathrm{x}| = |2\mathrm{x} + 3|.$$

**Soluție.** Avem $1 - x = 2x + 3$, de unde $x = -2$ și $1 - x = -2x - 3$, de unde $x = -4$. Așadar, $x \in \{-4, -2\}$.

**R.I.2**. Arătați că: $|1 - \sqrt{3}| + |2 - \sqrt{3}|$ este număr natural.

**Soluție.** Avem $|1 - \sqrt{3}| + |2 - \sqrt{3}| = \sqrt{3} - 1 + 2 - \sqrt{3} = 1 \in N$.

**R.I.3.** Calculați partea întreagă și fractionară a numărului $x = \frac{1}{2} + \sqrt{2}$.

**Soluție.** Cum $1 < x < 2$, partea întreagă a lui x este 1, iar partea fracționară este $\sqrt{2} - \frac{1}{2}$.

**R.I.4.** Determinați numărul real x astfel încât numerele $x - 2, x, x + 2$ să fie termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

**Soluție.** Având în vedere că $x = (x - 2 + x + 2)/2$ conduce la $x = x$, concluzionăm că pentru orice x real $x - 2, x, x + 2$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

**R.I.5.** Se știe că într-o progresie geometrică avem:

$$\begin{cases} b_1 + b_3 = 20 \\ b_2 + b_4 = 40. \end{cases}$$

Calculați $b_1 + b_2 + b_3 + b_4$.

**Soluție.** Dacă q este rația progresiei geometrice atunci $b_1 + b_3 = b_1(1 + q^2)$, iar $b_2 + b_4 = b_1 q(1 + q^2)$. Astfel obținem: $q = 2, b_1 = 4, b_2 = 8, b_3 = 16, b_4 = 32$, iar $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 60$.

**R.I.6.** Într-o progresie geometrică $b_{2021} = 162, b_{2018} = 6$. Calculați $b_{2022}$.

**Soluție.** Dacă q este rația progresiei geometrice atunci $b_{2021} = b_1 q^{2020}, b_{2018} = b_1 q^{2017}$. Atunci $\frac{b_{2021}}{b_{2018}} = q^3$. Pe de altă parte, $\frac{b_{2021}}{b_{2018}} = \frac{162}{6}$, de unde obținem $q = 3$ și $b_{2022} = 486$.

**R.I.7.** Determinați numărul natural $x$ din egalitatea:

$$1+3+5+\cdots+x=121.$$

**Soluție.** Observăm că în partea stângă a egalității avem o progresie aritmetică cu rația 2. Dacă considerăm n termeni, atunci:

$$\frac{\big(1+1+2(n-1)\big)n}{2}=121,$$

de unde $n=11$ și $x=21$.

**R.I.8.** Determinați partea întreagă a expresiei:

$$\frac{n}{n^2+1}, n\in N.$$

**Soluție.** Cum $0<\frac{n}{n^2+1}<1$, $\left[\frac{n}{n^2+1}\right]=0$.

**R.I.9.** Arătați că:

$$\frac{1+ai}{1-ai}+\frac{1-ai}{1+ai}\in R$$

pentru orice $a\in R$.

**Soluție.** Prin amplificare cu conjugatul și efectuarea calculului ajungem la $\frac{2}{1+a^2}\in R$.

**R.I.10.** Determinați modului numărului $\left(\frac{1}{3}-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^{2022}$.

**Soluție.** Notăm z=$\frac{1}{3}-\frac{2\sqrt{2}}{3}$, iar $|z^{2022}|=|z|^{2022}=1$.

## I.3. Probleme propuse

**P.I.1.** Rezolvați in R ecuația:

$$|1+\mathrm{x}|-|\mathrm{x}-3|=2.$$

**Indicație.** Se explicitează modulele și se consideră cazurile: $x\in(-\infty,-1), x\in[-1,3)$, $x\in(3,\infty)$.

**P.I.2.** Rezolvați in R ecuația:

$$\big|1+\mathrm{x}+|1-x|\big|=10.$$

**P.I.3.** Calculați partea întreagă și fractionară a numărului $x=\sqrt{2}+\sqrt{5}$.

**Indicație.** Utilizăm observația $3<x<4$.

**P.I.4.** Rezolvați ecuația $\left[\frac{x-1}{2}\right]=x$.

**Indicație.** Având în vedere că $x$ este partea întreagă a lui $\frac{x-1}{2}$ înseamnă că este un număr întreg. Din $x \leq \frac{x-1}{2} < x+1$ se obține în final $x \in \{-2,-1\}$.

**P.I.5.** Arătați că numerele $x-1, 2x+2, 3x+3$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice, pentru orice x real.

**P.I.6.** Determinați $x \in (0,\infty)$, astfel încât $x-1, x+1, 2x$ să fie termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

**P.I.7.** Dacă $S_n$ este suma primilor $n$ termeni ai unei progresii geometrice, iar $S_3 = 10, S_6 = 90$, atunci determinați $S_9$.

**P.I.8.** Determinați numărul natural $x$ din egalitatea:

$$2+4+5+\cdots+x = 110.$$

**Indicație.** Se observă că partea stângă a egalității este o progresie aritmetica cu rația 2. Se obține x=20.

**P.I.9.** Arătați că:

$$(1+2i)^2 + (1-2i)^2 \in Z.$$

**P.I.10.** Fie $\varepsilon \in C - R$ rădăcină a ecuației $x^2+x+1=0$. Calulați:

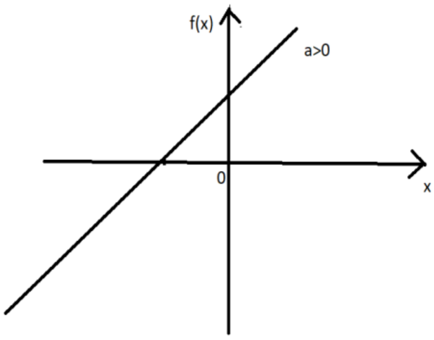
$$(1+\varepsilon)^{2022} + (1+\varepsilon^2)^{2022}.$$

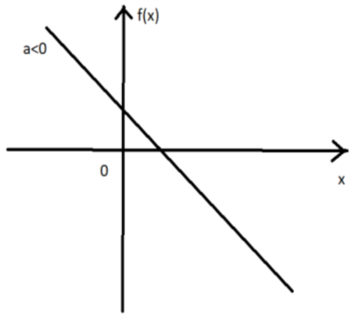
**Indicație.** Se folosesc relațiile: $\varepsilon^3 = 1, 1+\varepsilon = -\varepsilon^2, 1+\varepsilon^2 = -\varepsilon$.

# Capitolul II – Funcția de gradul întâi și doi

## II.1. Breviar teoretic

Funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, a, $b\in \mathbb{R}$, $a\neq 0$ se numește funcție de gradul I.
Funcția de gradul I este strict crescătoare dacă a>0 si strict descrescătoare dacă a<0, iar imaginea funcției geometrică este o dreaptă.




Semnul funcției de gradul I :

| x | $-\infty$ | $-\frac{b}{a}$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|
| f(x) | Semn opus semnului lui a | 0 | Semn semnul lui a |

Funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$, $a,b,c \in \mathbb{R}$, $a\neq 0$ se numește funcția de gradul al II-lea.
Imaginea geometrică a funcției de gradul II este o parabolă.

Dreapta de ecuație $x=-\frac{b}{a}$ este axă de simetrie a graficului, iar vârful parabolei, $V(x_V, y_V)$ are coordonatele $x_V=-\frac{b}{a}$ , $y_V=-\frac{\Delta}{4a}$. V este punctul de minim dacă a>0 și punct de maxim dacă a<0.
Forma generală a ecuației de gradul al II-lea cu coeficienți reali este $ax^2+bx+c=0$, a, b, c $b\in \mathbb{R}$, $a\neq 0$.
Soluția ecuației de gradul II este:
- $\Delta=b^2-4ac$ si $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ dacă $\Delta>0$, $x_{1,2}\in \mathbb{R}$
- dacă $\Delta<0$, ecuația nu admite rădăcini reale
- dacă $\Delta=0$, ecuația admite 2 rădăcini reale egale $x_{1,2}=\frac{-b}{2a}$.

Relațiile lui Viete: $S=x_1+x_2=-\frac{b}{a}$; $P=x_1\cdot x_2=-\frac{c}{a}$.

## II.2. Probleme rezolvate

**R.II.1.** Fie funcția f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f(x)=3x+4. Determinați a $\in \mathbb{R}$ pentru care f(a +3)=f(5).
**Soluție.** Avem: f(a)=3a+4 și f(5)=19 și 3a+4+3=19, de unde a=4.

**R.II.2.** Fie funcția f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f(x)=2x-3. Determinați a $\in \mathbb{R}$ știind că punctul A(a+1, a-1) aparține graficului acestei funcții.
**Soluție.** A$\in G_f \Rightarrow$f(a+1)=a-1 și f(a+1)=2(a+1)-3=2a-1 $\Rightarrow$ 2a-1=a-1 $\Rightarrow$ a=0.

**R.II.3.** Fie funcțiile f, g:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f(x)=x-1, g(x)=-3x+7. Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficului celor două funcții.
**Soluție.** f(x)=g(x) $\Rightarrow$ x-1=-3x+7 $\Rightarrow$ 4x=8 $\Rightarrow$ x=2. F(2)=g(2)=1 $\Rightarrow$ A(2,1)$\in G_f \cap G_g$.

**R.II.4.** Determinați toate valorile numărului real x pentru care funcția f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f(x)=x+3 verifică inegalitatea
2f(x)+f(2)$\geq$4f(1)

**Soluție.** $\left.\begin{array}{r} 2\mathrm{f}(\mathrm{x}) + \mathrm{f}(2) = 2(\mathrm{x}+3) + 5 = 2\mathrm{x} + 11 \\ 4\mathrm{f}(1) = 4 \cdot 4 = 16 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ 2x+11$\geq$16 $\Rightarrow$ x$\geq \frac{5}{2}$ $\Rightarrow$ x$\in \left[\frac{5}{2}, \infty\right)$

**R.II.5.** Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $\frac{3x-1}{2x-8}<1$

**Soluție.** $\frac{3x-1}{2x-8}<1 \Leftrightarrow \frac{3x-1}{2x-8} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{3x-1-2x+8}{2x-8} < 0 \Leftrightarrow \frac{x+7}{2x-8} < 0.$
Notăm $\frac{x+7}{2x-8} = H(x)$.
Semnul funcției H(x) va fi:

| x | $-\infty$ | | -7 | | 4 | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x+7 | | - - - - | 0 | + + + + + + + | | + + + + + + + + | |
| 2x-8 | | - - - - - | - | - - - - - - - | 0 | + + + + + + + + | |
| H(x) | | + + + + | 0 | - - - - - - - | / | + + + + + + + + | |

Prin urmare H(x)<0 dacă x$\in [-7, 4)$.

**R.II.6.** Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f(x)=-$x^2$+6x-9.
**Soluție.** $x_V = -\frac{b}{a} = \frac{-6}{-2} = 3$; $y_V = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{36-36}{-4} = 0$, deci V(3, 0).

**R.II.7.** Se consideră funcția f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f(x)=$x^2$-4x+9. Arătați că vârful parabolei asociate funcției se află pe dreapta de ecuație y=-x+7.
**Soluție.** $x_V = -\frac{b}{a} = 2$; $y_V = -\frac{\Delta}{4a}$=5. Deci V(2, 5). Punctul V(2, 5) aparține dreptei y=-x+7 deoarece 5=-2+7.

**R.II.8.** Determinați $m \in \mathbb{R}$, pentru care soluțiile ecuației $x^2-2mx+m+1=0$ verifică egaitatea $x_1+x_2=x_1x_2$.

**Soluție.** $S=x_1+x_2=-\frac{b}{a}=2m$; $P=x_1x_2=\frac{c}{a}=m+1$, deci $2m=m+1 \Rightarrow m=1$.

**R.II.9.** Determinați $m \in \mathbb{R}$, pentru care graficul funcției $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4mx+m+3$ este tangent axei Ox.

**Soluție.** $G_f$ este tangent axei Ox dacă $y_V=0$. $y_V=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{16m^2-4(m+3)}{4}=0 \Leftrightarrow 16m^2-4m-12=0$. Ecuația devine: $4m^2-m-3=0 \Rightarrow m_{1/2}=\frac{1\pm 7}{8} \Rightarrow m_1=1, m_2=-\frac{3}{4}$.

Prin urmare $m\in\{1,-3/4\}$.

**R.II.10.** Determinați $m \in \mathbb{R}^*$ pentru care ecuația $ax^2+(3a+1)x+a+3=0$ are soluții reale.

**Soluție.** Ecuația are soluții reale dacă $\Delta \geq 0$.

$\Delta=(3a+1)^2-4(a+3)a=9a^2+6a+1-4a^2-12a=5a^2+1-6a$

$5a^2+1-6a=0 \Rightarrow a_{1/2}=\frac{6\pm 4}{10} \Rightarrow a_1=1$ sau $a_2=\frac{1}{5}$.

| a | $-\infty$ | | | | $\frac{1}{5}$ | | | | | | 1 | | | | | | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta$ | | + | + | + | 0 | - | - | - | - | - | 0 | + | + | + | + | + | + | + |

Prin urmare $\Delta \geq 0$ daca $a\in\left(-\infty,\frac{1}{5}\right] \cup [1;\infty)$.

## II.3. Probleme propuse

**P.II.1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$. Calculați $f(-1/2)\cdot f(-1)\cdot f(0)\cdot f(1)\cdot f(1/2)$

**P.II.2.** Determinați coordonatele punctelor de intersecție ale graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$, $g: :\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x)=x^2-x+1$.

**P.II.3.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=-3x+6$. Determinați $x \in \mathbb{R}$ pentru care $\frac{f(x)}{15-f(x)} \leq 0$.

**P.II.4.** Să se determine funcția de gradul I pentru care $f(2)=5$ si $f(3)=7$.

**P.II.5.** Determinați soluțiile reale ale inecuației $\frac{2x+3}{x^2+x+1} \geq 1$.

**P.II.6.** Fie funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+1$. Să se afle $m \in \mathbb{R}$ astfel încât valoarea minimă a funcției să fie egală cu $-\frac{1}{4}$.

**P.II.7.** Demonstrați că ecuația $x^2-(2m+1)x+m^2+m=0$ admite rădăcini reale distincte, oricare ar fi $m\in\mathbb{R}$.

**P.II.8.** Fie $x_1$ și $x_2$ rădăcinile ecuației $x^2$-6x+6=0. Calculați $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$ .

**P.II.9.** Demonstrați că mulțimea $\{x\in \mathbb{R} | x^2-(m+1)x+m=0,\ m\in \mathbb{R}\}$ este nevidă.

**P.II.10.** Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $\frac{2x-3}{1-x} \geq \frac{3x+2}{1-2x}$.

# Capitolul III – Operații cu puteri și radicali. Ecuații iraționale

## III.1. Breviar teoretic

Se numește radical de ordin n ∈ ℕ, n≥ 2 din numărul pozitiv a și se notează $\sqrt[n]{a}$ acel număr pozitiv unic cu proprietatea $x^n=a$.

Proprietăți ale radicalului:

P1. $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$, P2. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{b}{a}}$, $b\neq 0$,

P3. $\sqrt[mn]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^p}$, P4. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}$.

Proprietăți ale ridicării la putere: (x, y>0, p, q∈ ℝ)

P1: $x^p\cdot x^q=x^{p+q}$, P2. $\frac{x^p}{x^q}=x^{p-q}$,

P3. $(x^p)^q=x^{pq}$, P4. $(xy)^p=x^p\cdot y^p$.

Dacă $x\in\mathbb{N}$ și $\sqrt[n]{x}\notin\mathbb{N}$ atunci $\sqrt[n]{x}\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

## III.2. Probleme rezolvate

**R.III.1.** Calculați $\sqrt[3]{125}+\sqrt{16}+\sqrt[3]{-27}$.

**Soluție.** $\sqrt[3]{125}+\sqrt{16}+\sqrt[3]{-27}=\sqrt[3]{15^3}+\sqrt{4^2}+\sqrt[3]{-3^3}=6$.

**R.III.2.** Determinați domeniul maxim de definiție al funcției $f:D\to\mathbb{R}$, f(x)= $\sqrt{5x-10}$.

**Soluție.** Condiția de existență a radicalului 5x-10≥ 0 ⇒ $x\geq 2\Rightarrow x\in[2,\infty)\Rightarrow$ D=[2, ∞ ).

**R.III.3.** Rezolvați în ℝ ecuația $\sqrt{3x+4}=2\sqrt{2}$.

**Soluție.** Condiții de existență:

$$\begin{cases}3x+4\geq 0 & \Rightarrow & x\geq -\frac{4}{3}\\ x\geq 0 & \Rightarrow & x\geq 0\end{cases}\Rightarrow x\in[0,\infty)$$

Se ridică ambii membri ai ecuației la pătrat și se obține 3x+4=4x ⇒ x=4 ∈ $[0,\infty)$ ⇒ x=4 soluție a ecuației.

**R.III.4.** Rezolvați în ℝ ecuația $\sqrt{x^2-x-2}=x-2$.

**Soluție.** Condiții: $\begin{cases}x^2-x-2\geq 0\\ x-2\geq 0\end{cases}$

$x^2-x-2=0$ ⇒ $x_{1/2}=\frac{1\pm 3}{2}$ ⇒ $x_1=2$ și $x_2=-1$

Prin urmare $x^2-x-2\geq 0$ dacă $x\in(-\infty,-1]\cup[2,\infty)$.

Avem: x-2≥ 0 ⇒ x≥ 2 ⇒ x ∈ [2, ∞ ). Ca atare D=[2, ∞ ).

Ecuația devine: $x^2-x-2=x^2-4x\mp 4$ ⇒ 3x=6 ⇒ x=2.

Cum 2∈ [2, ∞ ), x=2 este soluția ecuației de la 4.

**R.III.5.** Determinați toate soluțiile reale ale ecuației $\sqrt{x-1} = 3 - x$.
**Soluție.** Condiții:

$$\left.\begin{matrix} x-1 \geq 0 \ \Rightarrow x \geq 1 \\ x-2 \geq 0 \ \Rightarrow x \leq 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow D = [1,3]$$

Ecuația devine: $x-1=9-6x+x^2 \ \Rightarrow \ x^2-7x+10=0$
$\Rightarrow x_{1/2}=\frac{7\pm3}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1=5$ si $x_2=2$.
Deoarece $5\notin [1,3]$, x=5 nu este soluție a ecuației date.
Prin urmare x=2 este soluție unică.

**R.III.6.** Determinați domeniul maxim de definiție al funcției f:D→ ℝ, f(x)= $\sqrt{x^2-4x+3}$
**Soluție.** $x^2 - 4x + 3 \geq 0$; $x_{1/2}=\frac{4\pm2}{2} \Rightarrow x_1=3$ și $x_2=1$.
Prin urmare $D=(-\infty,-1] \cup [3,\infty)$.

**R.III.7.** Se consideră funcția f:ℝ → ℝ, $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Calculați (f∘f)(512).
**Soluție.** Avem: $512=2^9$; $(f\circ f)(2^9)=f(f(2^9))=f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2^9}}\right)=f\left(\frac{1}{2^3}\right)=\frac{1}{\sqrt[3]{2^3}}=\frac{1}{2}$.

**R.III.8.** Arătați că numărul $2(4+\sqrt{3})-\sqrt{12}$ este natural.
**Soluție.** $2(4+\sqrt{3})-\sqrt{12}=8+2\sqrt{3}-2\sqrt{3}=8\in \mathbb{N}$.

**R.III.9.** Calculați media aritmetică a numerelor $a=4(5-\sqrt{5})$ si $b=4\sqrt{5}$.
**Soluție.** $m_a=\frac{a+b}{2} = \frac{4(5-\sqrt{5})+4\sqrt{5})}{2} = \frac{20-4\sqrt{5}+4\sqrt{5}}{2} = 10$.

**R.III.10.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} = 0$$

**Soluție.** Deoarece $\begin{cases} \sqrt{x+1} \geq 0 \\ \sqrt{x-1} \geq 0 \\ \sqrt{x+2} \geq 0 \end{cases}$ suma nu poate fi 0 decât dacă fiecare termen este nul, ceea ce este imposibil. Prin urmare ecuația nu are soluție în mulțimea numerelor reale.

## III.3. Probleme propuse

**P.III.1.** Să se reolve în mulțimea numerelor reale următoarele ecuații:

a) $\sqrt{x^2+x+1} = 1$; b) $\sqrt{x^2+1} = x + 1$
c) $\sqrt{x-1} = 3 - x$; d) $\sqrt{x^2-15} - x = -3$
e) $\sqrt{2-x} + 1 = 0$; e) $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{x+3} = 2$.

**P.III.2.** Fie funcția f:[0, ∞) → ℝ, f(x)= $\sqrt{x}$. Demonstrați că:
$f\left(\frac{4+9}{2}\right) > \frac{f(4)+f(9)}{2}$

**P.III.3.** Demonstrați că numerele 1, $\sqrt[3]{27},\ \sqrt{81}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

**P.III.4.** Arătați ca $2^{-1} + 2^{-2} = 0{,}75$

**P.III.5.** Ordonați crescător numerele $\sqrt{12}$, $2\sqrt{2}$ și 3.

**P.III.6.** Calculați $\left(\frac{5}{2}\right)^{-1} - \sqrt[3]{\frac{8}{125}}$

**P.III.7.** Demonstrați că $\sqrt[3]{125} - \sqrt{16} < \sqrt[3]{1331} - \sqrt{81}$

**P.III.8.** Rezolvați în ℝ ecuația $\sqrt[3]{x^3 + x^2 - x - 2} = x$

# Capitolul IV –Vectori. Deapta în plan.

## IV.1. Breviar teoretic

Se consideră sistemul de axe ortogonal xOy. Fie punctele $A=(x_A,y_A)$ și $B=(x_B,y_B)$. Atunci:

- ✓ distanța $AB=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}$;
- ✓ mijlocul segmentului are coordonatele $\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$

Fie d o dreaptă în planul xOy. Forma generală a dreptei d este:

$$ax+by+c=0, a,b,c\in R.$$

Distanța de la punctul A la dreapta d este:

$$d(A,d)=\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Fie d o dreaptă oblică pe care fixăm punctele A și B. Panta dreptei d este dată de formula:

$$m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}.$$

Dreapta d care trece prin punctul $A=(x_A,y_A)$ și panta m are ecuația:

$$y-y_A=m(x-x_A).$$

Dreapta care trece prin punctul $A(x_A,y_A)$ și are panta $m$ are ecuația:

$$y-y_A=m(x-x_A).$$

Vectorul determinat de punctele (0,0) și (1,0) se notează cu $\vec{\imath}$, iar cel determinat de punctele (0,0) și (0,1) se notează cu $\vec{\jmath}$. Orice vector $\vec{u}$
se poate scrie în mod unic în funcție de $\vec{\imath}$ și $\vec{\jmath}$ astfel:

$$\vec{u}=u_x\vec{\imath}+u_y\vec{\jmath},$$

unde $u_x\, u_y\in R$.
Fie $\vec{u}=u_x\vec{\imath}+u_y\vec{\jmath}$, $\vec{v}=v_x\vec{\imath}+v_y\vec{\jmath}$ doi vectori în planul xOy. Atunci au loc:

1. $|\vec{u}|=\sqrt{u_x^2+u_y^2}$:
2. $\vec{u}=\vec{v}\iff u_x=v_x, u_y=v_y$;
3. $\vec{u}\cdot\vec{v}=u_x\cdot v_x+u_y\cdot v_y$;
4. $\vec{u}\perp\vec{v}=u_x\cdot v_x+u_y\cdot v_y=0$;
5. $\vec{u}\parallel\vec{v}\iff\frac{u_x}{u_y}=\frac{v_x}{v_y}$;
6. $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=\frac{u_x\cdot v_x+u_y\cdot v_y}{\sqrt{u_x^2+u_y^2}\sqrt{v_x^2+v_y^2}}$.

## IV.2. Probleme rezolvate

**R.IV.1.** Fie vectorii $\vec{u} = 3\vec{\imath} + (\mathrm{m}-3)\,\vec{\jmath}$ și $\vec{v} = (\mathrm{m}-3)\vec{\imath} + \mathrm{m}\,\vec{\jmath}$. Să se determine $m > 0$ astfel încât cei doi vectori să fie perpendiculari.

**Soluție.** Condiția de perpendicularitate a vectorilor $\vec{u}$ și $\vec{v}$ este $3(m-3) + m(m-3) = 0$, ceea ce conduce la m=3.

**R.IV.2.** Arătați că vectorii $\vec{u} = 3\vec{\imath} - 4\vec{\jmath}$ și $\vec{v} = \vec{\imath} + 2\,\vec{\jmath}$ formează un unghi obtuz.

**Soluție.** Calculăm produsul scalar al vectorilor $\vec{u}$ și $\vec{v}$:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 3\cdot 1 + (-4)\cdot 2 = -2.$$

Având în vedere că produl scalar este negativ, vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ formează un unghi obtuz.

**R.IV.3.** Fie vectorii $\vec{u} = 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$, $\vec{v} = \overrightarrow{2\imath} + 3\,\vec{\jmath}$ și $\vec{w} = 4\vec{\imath} - \vec{\jmath}$. Determinați numerele reale a și b astfel încât $\mathrm{a}\vec{u} + \mathrm{b}\vec{v} = 2\vec{w}$.

**Soluție.** Din relația $\mathrm{a}\vec{u} + \mathrm{b}\vec{v} = 2\vec{w}$ obținem sistemul:

$$\begin{cases} 3a + 2b = 8 \\ -2a + 3b = -2 \end{cases}$$

ceea ce conduce la $a = \frac{28}{13}, b = \frac{10}{13}$.

**R.IV.4.** În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $A(-1,2)$ și $B(3,4)$. Determinați coordonatele mijlocului segmentului AB.

**Soluție.** Fie M mijlocul segmentului AB. Coordonatele lui M sunt:

$$x_M = \frac{-1+3}{2} = 1,\ y_M = \frac{2+4}{2} = 3.$$

**R.IV.5.** Determinați ecuația mediatoarei segmentului AB, unde $A(1,3)$ și $B(-3,5)$.

**Soluție.** Fie M mijlocul segmentului AB. Coordonatele lui M (-1, 4). Mediatoarea este dreapta perpendiculară pe mijlocul segmentului AB și are panta $m = -\frac{-3-1}{5-3} = 2$

Atunci, ecuația mediatoarei lui AB are ecuația:

$$y - 4 = 2(x+1)$$

sau $2x - y + 6 = 0$.

**R.IV.6.** Determinați simetricul punctului $A(1,-3)$ față de origine.

**Soluție.** Coordonatele simetricului punctului A față de origine le notam $x_B, y_B$ și verifică:

$$\frac{x_B + 1}{2} = 0, \frac{y_B - 3}{2} = 0,$$

de unde $x_B = -1, y_B = 3$.

**R.IV.7.** Scrieți ecuația dreptei d care trece prin punctul $A(-1,2)$ și este paralelă cu cu dreapta de ecuație x+2y-1=0.

**Soluție.** Ecuația x+2y-1=0 se poate scrie sub forma $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ cu panta $-\frac{1}{2}$. Ecuația dreptei d este:

$$y = mx + n,$$

unde $m = -\frac{1}{2}$, iar $n$ verifică ecuația $2 = (-1)m + n$, de unde $n = \frac{3}{2}$. Astfel ecuația căutată este:

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}.$$

**R.IV.8.** Calculați distanța de la punctul $M(-3, 1)$ la dreapta determinată de punctele $A(2, 0)$ și $B(0, -2)$.

**Soluție.** Dreapta d determinată de punctele $A(2, 0)$ și $B(0, -2)$ are ecuația:

$$y = x - 2.$$

Distanța de la punctul $M(-3, 1)$ la dreapta d este:

$$d(M, d) = \frac{|-3 - 1 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{2}}.$$

**R.IV.9.** Se consideră $\triangle ABC$ și punctele $M, N \in (BC)$ astfel încât $(BM) \equiv (CN)$. Demonstrați că $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

**Soluție.** Folosind regula triunghiului în $\triangle ABM$ avem $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$ și în $\triangle ACN$ avem $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}$. Prin adunarea celor două relații obținem:

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \left(\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN}\right),$$

dar $\overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{CN}$ și prin urmare $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} = \vec{0}$. Astfel, $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

**R.IV.10.** Se consideră patrulaterul ABCD și punctele $M, N$ mijloacele laturilor $(AB)$, respectiv $(CD)$. Demostrați că $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right)$.

**Soluție.** Folosind regula poligonului avem:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} \text{ și } \qquad \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}.$$

Adunând cele două relații $2\overrightarrow{MN} = 2\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) + \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right) + \left(\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{CN}\right)$.

Avem: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ și $\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{CN} = \vec{0}$, de unde $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$ și deci $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right)$.

## IV.3. Probleme propuse

**P.IV.1.** Fie vectorii $\vec{u} = 3\vec{\imath} + (\mathrm{m} - 2)\,\vec{\jmath}$ și $\vec{v} = (\mathrm{m} - 2)\vec{\imath} + 3\,\vec{\jmath}$. Să se determine $m > 0$ astfel încât cei doi vectori să fie paraleli.

**P.IV.2.** Fie vectorii $\vec{u} = 3\vec{\imath} - (\mathrm{a} + 2)\vec{\jmath}$ și $\vec{v} = 4\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$. Determinați $a \in R$ astfel încât $\vec{u}$ *și* $\vec{v}$ să aibă aceeași lungime.

**P.IV.3.** Fie vectorii $\vec{u} = (\mathrm{a} - 1)\vec{\imath} - 5\vec{\jmath}$ și $\vec{v} = 3\vec{\imath} + 5\vec{\jmath}$. Determinați $a \in R$ astfel încât $\vec{u}$ *și* $\vec{v}$ să fie opuși.

**P.IV.4.** Determinați ecuația dreptei care trece prin origine și este paralelă cu dreapta care trece prin punctele $A(1, 3)$ și $B(-3, 5)$.

**P.IV.5.** Determinați coordonatele punctului de intersecție a dreptelor

$$d_1: x + 2y - 1 = 0, d_2: -2x + y + 3 = 0.$$

**P.IV.6.** Determanați punctele de intersecție a dreptei $d: x + 2y - 1 = 0$ cu axele de cooronate.

**P.IV.7.** Scrieți ecuația dreptei d care trece prin punctul $A(1, -3)$ și este perpendiculară pe dreapta de ecuație 2x+y-1=0.

**P.IV.8.** Calculați distanța de la punctul $M(2, -1)$ la dreapta determinată de punctele $A(0, 1)$ și $B(0, 2)$.

# Capitolul V – Noțiuni de teoria probabilităților. Procente. Dobânzi

## V.1. Breviar teoretic

**Regula produsului.** Dacă pentru situația A există m posibilități de realizare, iar pentru situația B există n posibilități de realizare, atunci realizarea simultană a situațiilor A și B este posibilă în mn moduri.

**Regula sumei.** Dacă pentru situația A există m posibilități de realizare, iar pentru situația B există n p posibilități de realizare, altele decât cele de la situația A, atunci realizarea cel puțin a uneia dintre situațiile A sau B este posibilă în m+n moduri.

**Submulțimi.** Fie A o mulțime cu n elemente, unde $n \in N$.

- ✓ Numărul total de ordonări ale elementelor mulțimii A este egal cu
$$P_n=n!.$$
- ✓ Numărul total de submulțimi cu $k \in N$ elemente este egal cu
$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, 0 \leq k \leq n.$$
- ✓ Numărul total de submulțimi ordonate formate cu k elemente este egal cu
$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, 0 \leq k \leq n.$$

**Definiția clasică a unei probabilități.** Probabilitatea realizării unui eveniment este egală cu raportul dintre numărul cazurilor favorabile și numărul de cazuri posibile asociate acelui eveniment.

**Procentul.** Dacă $a, b, p \in [0, \infty), b \neq 0$, astfel încât $\frac{a}{b} = \frac{p}{100}$, atunci spunem că a reprezintă p% din b.

**TVA-ul** este un impozit perceput de stat și se aplică la toate produsele și serviciile, înaintea prețului de vânzare. Prețul de vânzare al produsului este prețul de producție la care se adaugă TVA-ul.

## V.2. Probleme rezolvate

**R.V.1.** Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi care are exact 28 submulțimi cu două elemente.

**Soluție.** Fie n este numărul de elemente ale mulțimii, $n \in N, n \geq 2$. Numărul submulțimilor cu două elemente este $C_n^2$ și este egală cu 28. Obținem:

$$\frac{n(n-1)}{2}=28$$

ceea ce conduce la ecuația de gradul doi $n^2$-n-56=0 cu soluția convenabilă n=8.

**R.V.2.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 5.

**Soluție.**Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile, iar 18 dintre acestea sunt divizibile cu 5. Probabilitatea căutată este 18/90=0,2.

**R.V.3.** După o ieftinire de 25%, prețul unui telefon este 1200 lei. Determinați prețul inițial al telefonului.

**Soluție.** Dacă notăm cu x prețul inițial al telefonului atunci avem:

$$x - \frac{25}{100}x=1200$$

de unde x=1600 lei.

**R.V.4.** Prețul de vânzare al unui produs este 720 lei, iar taxa pe valoarea adaugată (T.V.A.) este 120 lei. Calculați procentul T.V.A.

**Soluție.**Dacă notăm cu p TVA-ul atunci avem:

$$(720-120)\frac{p}{100}=120,$$

de unde p=20%.

**R.V.5.** Demonstrați că numerele $C_4^1$, $A_4^2$ și $A_5^2$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

**Soluție.**Prin aplicarea formulelor de calcul ajungem la: $C_4^1 = 4$, $A_4^2 = 12$ și $A_5^2$=20, iar 12=(4+20)/2, deci $C_4^1$, $A_4^2$ și $A_5^2$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

**R.V.6.** Care este probabilitatea ca, alegând la întâmplare un element din mulțimea A={$C_7^0$, $C_7^1$, $C_7^2$, $C_7^3$}, acesta să fie divizibil cu 7?

**Soluție.** Mulțimea A={$C_7^0$, $C_7^1$, $C_7^2$, $C_7^3$} este echivalentă cu A={1, 7, 21, 35}. Probabilitatea ca alegând la întâmplare un element din mulțimea A, iar acesta să fie divizibil cu 7 este 3/4.

**R.V.7.** Dintre elevii unei clase 60% doresc o excursie la mare, 10% la munte, iar restul de 6 elevi o excursie în străinătate. Câți elevi sunt în componența clasei?

**Soluție.** Dintre elevii clasei 30% doresc o excursie în străinătate, iar numărul lor este 6. Dacă x reprezintă efectivul clasei, atunci 30x/100=6, de unde x=20 elevi.

**R.V.8.** Calculați TVA-ul pentru un produs, știind că prețul de vânzare al produsului este 238 lei (procentul TVA-ului este de 19%.

**Soluție.** Dacă x este prețul de producție, atunci 238=x+19x/100, de unde x=200 lei, iar TVA-ul este 38 lei.

**R.V.9.** Determinați perioada pe care trebuie depusă la bancă o sumă de bani, în regim de dobândă simplă cu rata dobânzii 10%, astfel încât la sfârșitul perioadei să se dubleze.
**Soluție.** Suma inițială este S, suma finală Sn=2S, iar Sn=S+D. Avem:

$$2S=S+S\frac{10n}{100},$$

de unde n=10 ani.

**R.V.10.** Determinați numărul funcțiilor f:{0,1,2,3}->{0,1,2,3,4} cu proprietatea f(0)≥3.
**Soluție.** Putem alege f(0) în două moduri, iar f(1), f(2), f(3) în câte cinci moduri. Prin urmare, există 2·5·5·5=250 funcții f:{0,1,2,3}->{0,1,2,3,4} cu proprietatea f(0)≥3.

## V.3. Probleme propuse

**P.V.1.** Determinați probabilitatea ca, alegând un număr oarecare de trei cifre, acesta să aibă exact două cifre egale.

**P.V.2.** Un produs se scumpește cu 10%, iar apoi se ieftinește cu 10%. Determinți ce procent reprezintă prețul final din prețul inițial.

**P.V.3.** Determinați numărul funcțiilor f:{0,1,2,3}->{0,1,2,3,4} care nu au proprietatea f(0)f(1)f(2)f(3)≠0.

**P.V.4.** Un agent economic are patru magazine notate M1, M2, M3, M4 iar într-o zi 40 clienți au cumpărat mărfuri din acestea. Calculați probabilitatea ca 10 clienți să cumpere din magazinul M4.

**P.V.5.** Dintre elevii unei clase 30% practică fotbalul și 50% practică baschetul. Știind că 10% dintre elevii clasei nu practică nici un sport, calculați procentul de elevi din clasă care practică ambele sporturi.

**P.V.6.** Se consideră mulțimea A={a,b,c,d,e}. Determinați numărul de submulțimi ale mulțimii A care au un număr impar de elemente.

**P.V.7.** Într-o clasă de elevi sunt 11 fete și 15 băieți. Se aleg la întâmplare 6 elevi. Cu ce probabilitate printre elevii aleși 4 sunt băieți?

**P.V.8.** Prețul unui produs este de 5400 lei. Cu ce procent trebuie ieftinit produsul pentru ca acesta să coste 4860 lei?

**P.V.9.** Câte numere de trei cifre distincte, divizibile cu 5, se pot forma utilizând cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5?

**P.V.10.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să verifice inegalitatea n!≤ n(n-1).

# Capitolul VI – Matrice și determinanți

## VI.1. Breviar teoretic

### Matrice

Fie $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{mxn}(K)$ și $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{mxn}(K)$ unde $K =$ $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$.

Suma matricelor A și B este $A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{mxn}(K)$

Înmulțirea cu scalar este $aA = \begin{pmatrix} aa_{11} & \cdots & aa_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ aa_{m1} & \cdots & aa_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{mxn}(K)$

Înmulțirea matricelor A și B este $AB = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{mxn}(K)$, where $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$.

Matricea nulă $O_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ și matricea unitate de ordinul n este $I_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

### Determinanți

Determinantul de ordinul doi: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Determinantul de ordinul trei: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = aek + bfg + cdh - ceg - ahf - bdk$

Au loc următoarele proprietăți:

- ✓ Dacă într-un determinant o linie sau o coloană are toate elementele zero, atunci acesta este zero
- ✓ Dacă într-un determinant două linii sau două coloane sunt identice, atunci acesta este zero
- ✓ Dacă într-un determinant inversăm două linii sau două coloane, atunci determinantul își schimbă semnul
- ✓ Într-un determinant se poate da factor comun din elementele oricărei linii sau coloane

- ✓ Într-un determinant la elementele unei linii sau coloane putem aduna o altă linie sau o altă coloană înmulțită cu un număr real astfel încât valoarea determinantului să nu se modifice.

## VI.2. Probleme rezolvate

**R.VI.1.** Determinați numărul real $x$ astfel încât:

$$\begin{vmatrix} 2 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

**Soluție.** Calculând determiantul obținem $2 - x^2 = -2$, de unde $x \in \{-2, 2\}$.

**R.VI.2.** Determinați numărul real $x$ astfel încât:

$$\begin{vmatrix} 2x & 2 & 3 \\ -1 & x & 1 \\ x & 1 & 0 \end{vmatrix} = -6.$$

**Soluție.** Calculând determiantul obținem $-3 - 3x^2 = -6$, de unde $x \in \{-1, 1\}$.

**R.VI.3.** Dacă $x_1$ și $x_2$ sunt rădăcinile ecuației $x^2 - 3x + a = 0$, determinați numărul real $a$ astfel încât:

$$\begin{vmatrix} -x_1 & x_2 \\ x_2 & x_1 \end{vmatrix} < -1.$$

**Soluție.** Calculând determiantul obținem $x_1^2 + x_2^2 > 1$, unde folosim relațiile $x_1 + x_2 = 3$ și $x_1 x_2 = a$. Astfel obținem $9 - 2a > 1$, de unde $a < 4$.

**R.VI.4.** Calculati $\det(A)$, unde $A = BC$, unde $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ și $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

**Soluție.** Avem: $BC = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, iar det(A)=11.

**R.VI.5.** Demonstrați că matricea $A = (\sqrt{2} - \sqrt{3})I_2 - B$ este inversabilă, unde B= $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

**Soluție.** Avem:

$$A = (\sqrt{2} - \sqrt{3}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Atunci $\det(A) = -\sqrt{6}$, de unde deducem că A este inversabilă.

**R.VI.6.** Fie matricea $A_k = \begin{pmatrix} k & 3^k \\ 1 & -3k \end{pmatrix}, k \in N$. Determinați matricea $B = A_1 + A_2 + \cdots + A_{100}$.

**Soluție.** Matricea $B$ se poate scrie:

$$B=\begin{pmatrix}1+2+\cdots+100 & 3^1+3^2+\cdots+3^{100}\\ 1+\cdots+1 & -(1+2+\cdots+100)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}50*101 & \frac{3^{101}-3}{3-1}\\ 100 & -50*101\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}5050 & \frac{3^{101}-3}{3}\\ 100 & -5050\end{pmatrix}$$

**R.VI.7.** Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Determinați $A^{100}$.

**Soluție.** Avem: $A^2=\begin{pmatrix}1 & 2\cdot 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A^3=\begin{pmatrix}1 & 2\cdot 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A^4=\begin{pmatrix}1 & 2\cdot 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Astfel, prin inducție se arată că $A^{100}=\begin{pmatrix}1 & 2\cdot 100\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 200\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

**R.VI.8.** Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Determinați $A^{50}$.

**Soluție.** Avem: $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=B+I_3$. Atunci:

$$A^{50}=(B+I_3)^{50}=\sum_{k=0}^{50}C_{50}^kB^kI_3^{50-k}=\sum_{k=0}^{50}C_{50}^kB^k=C_{50}^0B^0+C_{50}^1B^1+C_{50}^2B^2,$$

deoarece $B^k=O_3, k\geq 3$.
Astfel,

$$A^{50}=1+50\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}+1225\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -49 & 2546\\ 1 & 1 & -99\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

**R.VI.9.** Fie matricea $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. Determinați $A^{2022}$.

**Soluție.** Avem: $A^2=\begin{pmatrix}2\cdot 2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $A^3=\begin{pmatrix}2\cdot 2^2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $A^4=\begin{pmatrix}2\cdot 2^3 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. Astfel, prin inducție se arată că $A^{2022}=\begin{pmatrix}2^{2022} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

**R.VI.10.** Arătați că:

$$\begin{vmatrix}2-\sqrt{2} & 3-\sqrt{3}\\ 3+\sqrt{3} & 2+\sqrt{2}\end{vmatrix}$$

este un număr întreg.

**Soluție.** Avem:

$$\begin{vmatrix}2-\sqrt{2} & 3-\sqrt{3}\\ 3+\sqrt{3} & 2+\sqrt{2}\end{vmatrix}=(4-2)-(9-3)=-4\in Z.$$

## VI.3. Probleme propuse

**P.VI.1.** Determinați numărul real $x$ astfel încât:

$$\begin{vmatrix} x-2 & -2 \\ 1 & x \end{vmatrix} = 1.$$

**P.VI.2.** Determinați numărul real $x$ astfel încât:

$$\begin{vmatrix} 2-x & 1 & 0 \\ 1 & 2x & 1 \\ x & 2x & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

**P.VI.3.** Dacă $x_1$ și $x_2$ sunt rădăcinile ecuației $x^2-(a+2)x+a=0$, determinați numărul real $a$ astfel încât:

$$\begin{vmatrix} x_1 & -1 & 0 \\ 1 & x_1 & 1 \\ -2 & x_2 & 0 \end{vmatrix} > 2.$$

**P.VI.4.** Calculati $A^{-1}$, unde $A=BC$, iar $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ și $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

**P.VI.5.** Demonstrați că matricea $A=B-(\sqrt{3}-\sqrt{5})I_2$ este inversabilă, unde B= $\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{5} & -\sqrt{5} \end{pmatrix}$.

**P.VI.6.** Fie matricea $A_k=\begin{pmatrix} 2k & 2^k \\ 0 & k \end{pmatrix}$, $k\in N$. Determinați matricea $B=A_1+A_2+\cdots+A_{50}$.

**P.VI.7.** Fie matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Determinați $A^{300}$.

**P.VI.8.** Fie matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Determinați $A^{20}$.

**P.VI.9.** Fie matricea $A=\begin{pmatrix} 2022 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Determinați $A^{20}$

**P.VI.10.** Fie matricea $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculați $\det(A-2I_2)+\det(2I_2-A)$.

# Capitolul XVII – Integrala definită

## XVII.1. Breviar teoretic

Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este o funcție integrabilă care are primitive și F este o primitivă a sa, atunci:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) = F(x)|_a^b.$$

Formula de integrare prin părți:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx\,.$$

Prima formulă de schimbare de variabilă:

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt\,.$$

## XVII.2. Probleme rezolvate

**R.XVII.1.** Calculați $\int_0^2 (5x-6)e^x dx$.

**Soluție.** Alegem: $f(x)=5x-6$ cu $f'(x)=5$, $g'(x)=e^x$ cu $g(x)=e^x$. Avem:

$$\int_0^2 (5x-6)e^x dx = (5x-6)\,e^x|_0^2 - \int_0^2 5e^x dx = 4e^2-(-6)-5e^x|_0^2 = 11-e^2.$$

**R. XVII.2.** Calculați $\int_1^e xlnxdx$.

**Soluție.** Alegem: $f(x)=lnx$ cu $f'(x)=\frac{1}{x}$, $g'(x)=x$ cu $g(x)=\frac{x^2}{2}$. Avem:

$$\int_1^e xlnxdx = \frac{x^2}{2}lnx|_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}\frac{x^2}{2}dx = \frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\int_1^e xdx = \frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}|_1^e = \frac{e^2+1}{4}.$$

**R. XVII.3.** Calculați $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2xdx$.

**Soluție.** Alegem: $f(x)=sinx$ cu $f'(x)=\cos x$, $g'(x)=\sin x$ cu $g(x)=-\cos x$. Avem:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sinx^2dx = -\,sinx\;cosx|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x(-cos\,)\,dx = 0+\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-sin^2x)dx$$

$$=\frac{\pi}{2}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} sinx^2dx,$$

de unde $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sinx^2dx = \frac{\pi}{4}$.

**R. XVII.4.** Calculați $\int_1^2 (2x-1)^6 dx$.

**Soluție.** Luăm: $u(x) = 2x - 1$ cu $u'(x) = 2$. Avem:

$$\int_1^2 (2x-1)^6 dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_1^2 2(2x-1)^6 dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_1^2 (2x-1)'(2x-1)^6 dx = \frac{1}{2}\int_1^2 u'(x)u^6(x)dx = \frac{1}{2}\frac{u^7(x)}{7}\Big|_1^2$$
$$= \frac{1}{14}(3^7 - 1).$$

**R. XVII.5.** Calculați $\int_0^1 \frac{x^3}{x^4+1} dx$.

**Soluție.** $\int_0^1 \frac{x^3}{x^4+1} dx = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{4x^3}{x^4+1} dx = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{(x^4+1)'}{x^4+1} dx = \frac{1}{4}\ln|x^4+1|\,|_0^1 = \frac{1}{4}(ln2 - ln1) = \frac{1}{4}ln2.$

**R. XVII.6.** Calculați $\int_2^3 \frac{1}{x(x-1)} dx$.

**Soluție.** Folosim descopunerea în fracții simple:

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}$$

Prin aducere la același numitor și identificarea coeficienților $A = -1, B = 1$.

$$\int_2^3 \frac{1}{x(x-1)} dx = \int_2^3 -\frac{1}{x} dx = \int_2^3 \frac{1}{x-1} dx = -lnx|_2^3 + \ln(x-1)\,|_2^3 = ln4 - ln3 = ln\frac{4}{3}.$$

**R.XVII.7.** Calculați $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^4 sinxdx$.

**Soluție.** Notăm: $f(x) = x^4 sinx$. Atunci:

$$f(-x) = (-x)^4 \sin(-x) = -x^4 sinx = -f(x),$$

deci funcția f este impară cu $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$. Prin urmare, $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^4 sinxdx = 0$.

## XVII.3. Probleme propuse

**P. XVII.1.** Calculați $\int_0^1 (x^2 - 2x + 5)e^x dx$.

**P. XVII.2.** Calculați $\int_e^{2e} x^3 lnxdx$.

**P. XVII.3.** Calculați $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2 xdx$.

**P. XVII.4.** Calculați $\int_0^1 (3x-1)^5 dx$.

**P. XVII.5.** Calculați $\int_0^1 \frac{x}{x^4+1} dx$.

**P. XVII.6.** Calculați $\int_0^1 \frac{x+3}{(x-2)(x-3)} dx$.

**P. XVII.7.** Calculați $\int_{-1}^1 x^2 arctgx dx$.