Materiale didactice suport pentru pregătirea examenului de bacalaureat la disciplina Matematică - M1

Teme de Analiză Matematică

Elaborat de
Crăciunescu Aurelian

Material elaborat în cadrul proiectului CNFIS-FDI-2021-0471 „UVT – Acces și echitate în învățământul superior”

Cuprins

Introducere

Acest material a fost realizat din dorinţa de a contribui la o bună pregătire a examenului de bacalaureat, dar tot atât de bine poate fi utilizat pentru pregătirea examenului de admitere la Facultatea de Matematică şi Informatică.

Temele prezentate corespund disciplinei de Analiză Matematică din programa de bacalaureat (pentru matematica de tip M1) şi vor constitui subiecte de discuţie în cadrul întÎnirilor din cadrul programului de pregătire a examenului de bacalaureat propus de Universitatea de Vest din Timişoara pentru anul şcolar 2021/2022.

Fiecare temă abordată este însoţită de o scurtă prezentare teoretică alături de un set de probleme propuse şi complet rezolvate. La finalul materialului propunem cititorului un set de teste cu rol de concretizare şi sistematizare a rezultatelor teoretice.

Capitolul 1

Limite de funcţii. Continuitate.

1.1 Scurt breviar teoretic

1. Limite de funcţii

Deoarece în consideraţiile de mai jos va intervenii noţiunea de *vecinătate*, reamintim că o submulţime $V \subset \mathbb{R}$ se numeşte:

a) *vecinătate a unui număr real* $x_0 \in \mathbb{R}$, dacă există $\varepsilon > 0$ astfel încât $(x_0 - \varepsilon,\, x_0 + \varepsilon) \subset V$;

b) *vecinătate a lui* $+\infty$, dacă există $\varepsilon > 0$ astfel încât $(\varepsilon,\, +\infty) \subset V$;

c) *vecinătate a lui* $-\infty$, dacă există $\varepsilon > 0$ astfel încât $(-\infty,\, -\varepsilon) \subset V$

Peste tot în cele ce urmează $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ va nota o funcţie, iar $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punct de acumulare a al mulţimii D, notăm $x_0 \in D'$ (i.e. pentru orice vecinătate U a lui x_0 avem că mulţimea $D \cap V$ este infinită).

Definiţia 1.1.1 *Spunem că funcţia f are limită în punctul x_0 dacă există $l \in \overline{\mathbb{R}}$ astfel încât, pentru orice vecinătate V a lui l există U o vecinătate a lui x_0 cu proprietatea că, pentru orice $x \in U \cap D \setminus \{x_0\}$ rezultă că $f(x) \in V$.*

Remarca 1.1.1 1. Definiţia anterioară spune că funcţia f are limită în punctul x_0 dacă există un număr $l \in \overline{\mathbb{R}}$ faţă de care valorile lui f sunt oricât de "aproape" pentru vecinătăţi "suficiente" ale lui x_0.

2. Dacă există numărul l cu proprietăţile de mai sus, el este unic determinat, se numeşte *limita funcţie f în punctul* x_0 şi va fi notat $l = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

3. Definiţia limitei unei funcţii într-un punct poate fi reformulată echivalent în limbaj "$\varepsilon - \delta$". De exemplu, dacă $x_0, l \in \mathbb{R}$ atunci $l = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât, pentru orice $x \in (x_0 - \delta,\, x_0 + \delta) \cap D \setminus \{x_0\}$ rezultă că $f(x) \in (l - \varepsilon,\, l + \varepsilon)$ (sau echivalent $|f(x) - l| < \varepsilon$).

4. Chiar dacă x_0 este punct al domeniul de definiţie al funcţiei f (cu atât mai mult ĥ caz contrar) să observăm că valoarea funcţiei f în punçtul x_0 nu intervine în definiţia limitei lui f în acest punct.

Dacă impunem condiţia ca x să se "apropie" de x_0 dintr-o anumită submulţime, A, a lui D (domeniul de definiţie al funcţie f) obţinem ceea ce se numeşte *limită relativă la mulţimea A în punctul* x_0. Mai precis, avem:

Definiţia 1.1.2 *Fie $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $A \subset D$, iar x_0 un punct de acumulare al mulţimii A. Spunem că funcţia f are limită relativă la mulţimea A în punctul x_0, dacă există $l \in \overline{\mathbb{R}}$ astfel încât, pentru orice vecinătate V a lui l există U o vecinătate a lui x_0 cu proprietatea că, pentru orice $x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$ rezultă că $f(x) \in V$.*

Numărul $l \in \overline{\mathbb{R}}$ ce verifică definiţia anterioară, dacă există, este unic determinat, se numeşte *limita relativă la mulţimea A a funcţie f în punctul x_0* şi se notează cu $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x)$.

Remarca 1.1.2 1. Dacă funcţia f are limită în $x_0 \in D'$ atunci f are limită relativă la orice submulţime $A \subset D$ (cu $x_0 \in A'$) şi acestea sunt egale (i.e. $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

2. Dacă există $A, B \subset D$ astfel încât $x_0 \in A' \cap B'$ şi există

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in B}} f(x)$$

atunci funcţia f nu are limită în punctul x_0.

În cazul particular în care $A = (-\infty, x_0) \cap D$, limita relativă la mulţimea A în punctul x_0 (cu $x_0 \in A'$), dacă există, se numeşte *limita la stânga a funcţie f în punctul x_0* si se notează cu

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x), \text{ sau } \lim_{x \nearrow x_0} f(x),$$

iar dacă $B = (x_0, \infty) \cap D$, limita relativă la mulţimea B în punctul x_0 (cu $x_0 \in B'$), dacă există, se numeşte *limita la dreapta a funcţie f în punctul x_0* si se notează cu

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x), \text{ sau } \lim_{x \searrow x_0} f(x)$$

Limitele laterale/relative pot fi utilizate în justificarea limitei unei funcţii într-un punct prin:

Propoziţia 1.1.1 *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) Există $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;

ii) Există şi sunt egale $\lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim\limits_{x \searrow x_0} f(x)$.

În cazul în care una din afirmaţiile de mai sus este adevărată atunci toate cele trei limite sunt egale între ele.

Legătura dintre limite de funcţii si limite de şiruri este dată de:

Teorema 1.1.2 (Teorema lui Heine) *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) Există $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$;

ii) Pentru orice şir $(x_n)_{n \geq 1} \subset D \setminus \{x_0\}$ astfel încât $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, rezultă că există $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = l$.

Corolarul 1.1.1 *Dacă există două şiruri $(x_n)_{n \geq 1}, (y_n)_{n \geq 1} \subset D \setminus \{x_0\}$ cu proprietăţile:*

i) există $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \lim\limits_{n \to \infty} y_n = x_0$,

ii) există $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n \to \infty} f(y_n)$, *atunci funcţia f nu are limită în punctul x_0.*

Pentru calcularea limitei unei funcţii date într-un punct dat (şi uneori chiar pentru justificarea existenţei ei) se folosesc o serie de reguli (ce leagă limita de operaţiile cu funcţii) şi câteva "limite remarcabile" a căror existenţă şi valoare este de obicei justrificată apriorii ˆ in manualele de liceu.

De exemplu **regula sumei** afirmă că *limita sumei a două funcţii ce au limită într-un punct este egală cu suma limitelor celor două funcţii (în acel punct), înafara cazului în care la însumarea limitelor avem situaţia "$\infty - \infty$"* (caz numit de "nedeterminare" la însumare). Sunt justificate aici următoarele extensii ale adunării pe $\overline{\mathbb{R}}$:

$a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty$, $a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty$, $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$, iar $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$; (unde $a \in \mathbb{R}$).

În mod analog se obţim **regula produsului**, **regula raportului** şi **regula puterii**, ce justifică anumite extinderi ale operaţiilor respective pe $\overline{\mathbb{R}}$ dar care conduc şi la următoarele situaţii de "neaplicabilitate" a lor cunoscute sub numele de *nedeterminări*:

$$\infty - \infty, \, \mathbf{0} \cdot \infty, \, \frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}, \frac{\infty}{\infty}, \mathbf{1}^{\infty}, \mathbf{0}^{\mathbf{0}}, \infty^{\mathbf{0}}$$

"Trecerea" peste aceste situaţii de neaplicare a regulilor de calcul cu limite se face, de obicei, prin schimbarea **formei** legii funcţiei studiate dar (atenţie!) nu şi a valorilor acestei.

Dintre limitele "remarcabile" des utilizate în problemele de determinarea a valorii unei limite amintim:

Dacă există $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, iar $f(x) \neq 0$, pe o vecinătate a lui x_0, atunci:

i) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\sin f(x)}{f(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\tan f(x)}{f(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\arcsin f(x)}{f(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\arctan f(x)}{f(x)} = 1$;

ii) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{(1 + f(x))^r - 1}{f(x)} = r$, $(r \in \mathbb{R})$;

iii) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{a^{f(x)} - 1}{f(x)} = \ln a$, $(a \in \mathbb{R}_+^*)$;

iv) $\lim\limits_{x \to x_0} (1 + f(x))^{\frac{1}{f(x)}} = e$;

v) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\ln(1 + f(x))}{f(x)} = 1$;

vi) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1 - \cos f(x)}{f^2(x)} = \dfrac{1}{2}$;

vii) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - \sin f(x)}{f^3(x)} = \dfrac{1}{6}$

Un rezultat des utilizat în problemele de calcul a limitelor unor rapoarte este cunoscut ca *Regula lui L'Hôpital* dată de

Teorema 1.1.3 (Regula lui l' Hôpital) *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval, $x_0 \in I'$, iar $f, g : I \to \mathbb{R}$ astfel încât:*

i) Funcţiile f şi g sunt derivabile pe $I \setminus x_0$ şi $g'(x) \neq 0$, pentru orice $x \in I \setminus \{x_0\}$;

ii) Există $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ sau $\lim\limits_{x \to x_0} |g(x)| = +\infty$;

iii) Există $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Atunci există $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$.

O primă aplicaţie a noţiunii de limită este cea a existenţei unor drepte de care "se apropie" graficul unei funcţii. Aceste drepte se numesc *asimptote la graficul funcţiei* şi sunt introduse de următoarea definiţie.

Definiţia 1.1.3 *Fie $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $+\infty$ (resp. $-\infty$) să fie punct de acumulare al lui D.*

i) Dacă $l \in \mathbb{R}$, dreapta de ecuaţie

$$y = l$$

se numeşte asimptotă orizontală la graficul funcţie f spre $+\infty$, *(respectiv $-\infty$), dacă există (şi deci este finită) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ (respectiv $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$).*

ii) Dacă $m, n \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$, dreapta de ecuaţie

$$y = mx + n$$

se numeşte asimptotă oblică la graficul funcţie f spre $+\infty$ *(respectiv $-\infty$), dacă*

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad (\text{respectiv } m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}),$$

iar

$$n = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) \qquad (\text{respectiv } n = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - mx)).$$

Definiţia 1.1.4 *Fie $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, iar $a \in D' \cap \mathbb{R}$. Dreapta de ecuaţie*

$$x = a$$

se numeşte asimptotă verticală la graficul funcţie f *dacă cel puţin una din limitele laterale în punctul a este infinită.*

2. Continuitate

În continuare funcţiile utilizate sunt considerate ca fiind definite pe subitervale reale. De aceea prin I, J, ... vom nota intervale din $\mathbb{R}$.

Fie $f : I \to \mathbb{R}$, iar $x_0 \in I$.

Definiţia 1.1.5 *Spunem că funcţia f este continuă în punctul x_0 dacă există $\lim_{x\to x_0} f(x)$, iar aceasta este egală cu $f(x_0)$.*

Funcţia f se zice că este continuă pe I, dacă este continuă în fiecare punct $x_0 \in I$.

Un punct $x_0 \in I$ în care funcţia f nu este continuă se numeşte *punct de discontinuitate a funcţie f*. Un punct de discontinuitate al funcţie f se numeşte *disconinuitate de speţa I-a* dacă funcţia f admite limite laterale finite în acest punct (deci care sunt sau diferite sau egale dar diferite de $f(x_0)$). Altfel, un astfel de punct de discontinuitate se zice că este de *speţta a II-a*.

Remarca 1.1.3 *1. Sunt continue pe domeniul lor maxim de definiţie funcţiile polinomiale, exponenţiale, logaritmice, trigonometrice şi inversele lor, funcţiile putere, funcţia modul.*

2. Orice funcţie obţinută prin operaţii (de adunare, înmulţire, împărţire, ridicare la putere sau compunere), corect definite, cu funcţii continue este tot o funcţie continuă.

Dintre proprietăţiile generale ale funcţiilor continue reamintim:

Propoziţia 1.1.4 (Proprietatea lui Darboux a funcţiilor continue) *Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este continuă pe I, iar $J \subseteq I$ este un interval, atunci $f(J) = \{f(x) : x \in J\}$ este tot un interval. În particular imaginea unie funcţii continue pe un interval este tot un interval.*

Propoziţia 1.1.5 *Dacă* $f : I \to \mathbb{R}$ *este continuă pe* I*, iar* $a, b \in I$*,* $a < b$ *astfel încâ t* $f(a) \cdot f(b) < 0$ *atunci există (cel puţin) un punct* $x_0 \in (a,\, b)$ *astfel încât* $f(x_0) = 0$*.*

Teorema 1.1.6 (Teorema lui Weierstrass) *Dacă* $f : [a,\, b] \to \mathbb{R}$ *este o funcţie continuă, atunci* f *este mărginită şi îşi atinge marginile (i.e există* $x_1, x_2 \in [a,\, b]$ *astfel încât* $f(x_1) = \min\limits_{x \in [a,b]} f(x)$*, iar* $f(x_2) = \max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$*).*

1.2 Probleme propuse

Exerciţiul 1.1 Calculaţi următoarele limite:

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x-1)\sin nx}{\sin(x^2-x)}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$;

ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+x-sinx}{\ln^2(1+x)}$;

iii) $\lim\limits_{x\to \infty} x^p\left(e^{\frac{1}{x^q}}-1\right)$, unde $p, q \in \mathbb{R}$;

iv) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x\cos(2x)\ldots\cos(nx)}{x^2}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$;

v) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos(2x)}\sqrt{\cos(3x)}}{x^2}$;

vi) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$;

vii) $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\dfrac{1}{x}\right]$, unde $[x]$ notează partea întreagă a numărului real x;

viii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^n-\sin^n x}{x^{n+2}}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$;

ix) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x+\sin x}{x+\cos x}$;

x) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^n-\ln^n(1+x)}{x^{n+1}}$, unde $n \in \mathbb{N}$;

xi) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{a^{\sin x}+b^{\tan x}}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$, unde $a, b > 0$;

xii) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{2^x+3^x+4^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$

xiii) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x-[x]}{2x-[x]+1}$;

xiv) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin x}-e^{\tan x}}{e^{\sin 2x}-e^{\tan x}}$;

xv) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{2x+\sqrt{x}+3}{2x+1}\right)^{\sqrt{x}}$;

xvi) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})(1-\sqrt[4]{x})}{(1-x)^3}$;

xvii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x+2\sin x)}{\sin x}$;

xviii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[n]{\cos x}-\sqrt[m]{\cos x}}{\tan^2\frac{x}{2}}$, unde $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq 2$.

Exerciţiul 1.2 Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, calculaţi:

i) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}[kx]}{x}$;

ii) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sum\limits_{k=1}^{n} \left[\dfrac{k}{x^2}\right]$;

iii) $\lim\limits_{x\to 0} x^3 \sum\limits_{k=1}^{n} \left[\dfrac{k^2}{x^2}\right]$;

Exercițiul 1.3 Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție periodică. Să se arate că funcția f are limtă spre $+\infty$ dacă și numai dacă f este o funcție constantă.

Exercițiul 1.4 *Studiați continuitatea următoarelor funcții în punctele indicate:*

i) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2x+a}{x-2} & ,\quad x<2\\ 3\sqrt{1-\cos\dfrac{\pi x}{2}}+b & ,\quad x\geq 2\end{cases}$, $x_0=2$;

ii) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\left|x-\left[x+\dfrac{1}{2}\right]\right|$, $x_0=\dfrac{3}{2}$.

iii) $f:[0,\,1]\to\mathbb{R}\ f(x)=\begin{cases}x & ,\quad x\in[0,\,1]\cap\mathbb{Q}\\ 1-x & ,\quad x\in[0,\,1]\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$, $x_0=\dfrac{1}{3}$;

Exercițiul 1.5 Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\{x\}(1-\{x\})$, unde $\{x\}$ este partea fracționară a numărului real x.

i) Să se calculeze $\lim\limits_{x\nearrow 2} f(x)$ și $\lim\limits_{x\searrow 2} f(x)$.

ii) Studiați continuitatea funcție f și determinați $Im\,f$.

iii) Studiați dacă există $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

Exercițiul 1.6 Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}3^x+1 & ,\quad x\leq 1\\ a\sqrt{3x^2+1}+2 & ,\quad x>1\end{cases}$

i) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția f să fie continuă pe $\mathbb{R}$.

ii) Determinați asimptotele la graficul funcției f.

iii) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{f(x)-2}{x^2}+1\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$.

Exercițiul 1.7 Fie $a,b\in\mathbb{R}$ și $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}axe^x-x & ,\quad x\leq 0\\ x\cos x+b & ,\quad x>0\end{cases}$. Să se determine valorile $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția f să fie continuă pe $\mathbb{R}$ și să existe $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$.

Exercițiul 1.8 Arătați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^3\sin\dfrac{1}{x^2} & ,\quad x\neq 0\\ 0 & ,\quad x=0\end{cases}$ este continuă pe $\mathbb{R}$ și nemărginită atât inferior cât și superior. Cine este $Im\,f$?

Exercițiul 1.9 Determinați funcțiile continue $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că $f^2(x)=2f(x)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

Exercițiul 1.10 Fie $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, iar $f[a,\,b]\to[a,\,b]$ o funcție continuă.

i) Arătați că există $x_0\in[a,\,b]$ astfel încât $f(x_0)=x_0$.

ii) Arătaţi că există $x_0 \in [a,\, b]$ astfel încât $f(x_0) + x_0 = a + b$.

iii) Arătaţi că există $x_0 \in [a,\, b]$ astfel încât $f(x_0) + f(a + b - x_0) = 2x_0$.

Exerciţiul 1.11 Arătaţi că ecuaţia

$$(2x + 1)\ln x + 3x + 1 = 0$$

admite o unică soluţie.

Exerciţiul 1.12 Determinaţi asimptotele la graficul următoarelor funcţii:

i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 5}{\sqrt{x^2 + 1}}$;

ii) $f : (-2,\, 2) \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln \dfrac{2 + x}{2 - x}$.

iii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x - \sin x$.

Exerciţiul 1.13 Fie $f, g : [0,\, 1] \to [0,\, 1]$ două funcţii continue astfel încât g să fie surjectivă. Arătaţi că există $x_0 \in [0,\, 1]$ astfel ca $f(x_0) = g(x_0)$.

1.3 Solutii - Limite de funcţii. Continuitate.

Soluţie 1.1 *i)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x-1)\sin nx}{\sin(x^2-x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-x}{\sin(x^2-x)} \dfrac{\sin nx}{nx} n = n;$

ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+x-sinx}{\ln^2(1+x)} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x}{\ln(1+x)}\right)^2 \left(1+\dfrac{x-\sin x}{x^2}\right) = 1(1+0) = 1;$

iii) Dacă $q > 0$ atunci

$$L = \lim_{x\to\infty} x^p\left(e^{\frac{1}{x^q}}-1\right) = \lim_{x\to\infty} x^{p+q}\frac{e^{\frac{1}{x^q}}-1}{\frac{1}{x^q}} = \begin{cases} 1 & , \ p=-q \\ \infty & , \ p>-q \\ 0 & , \ p<-q \end{cases}.$$

Dacă $q = 0$ atunci $L = \begin{cases} \infty & , \ p>0 \\ e-1 & , \ p=0 \\ 0 & , \ p<0 \end{cases}$, iar dacă $q < 0$ atunci $L = \infty$.

iv) Să notăm $L_n = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x\cos(2x)\ldots\cos(nx)}{x^2}.$

Pentru $n = 1$ avem că

$$L_1 = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = 2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

iar pentru orice $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} L_n &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos(2x)\ldots\cos nx}{x^2} = \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos nx+(1-\cos x\cos(2x)\ldots\cos(n-1)x)\cos nx}{x^2} = \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos nx}{x^2} + \lim_{x\to 0}\cos nx\frac{1-\cos x\cos(2x)\ldots\cos(n-1)x}{x^2} = \\ &= 2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\frac{nx}{2}}\right)^2\frac{n^2}{4} + L_{n-1} = \frac{n^2}{2} + L_{n-1} \end{aligned}$$

Astfel,

$$L_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12},$$

pentru orice $n \geq 1$.

v)

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos(2x)}\sqrt{\cos(3x)}}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos(3x)}{x^2}\frac{1}{1+\sqrt{\cos(3x)}} + \sqrt{\cos(3x)}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos(2x)}}{x^2}\right) = \\ &= \frac{9}{4} + \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos(2x)}}{x^2} = \\ &= \frac{9}{4} + \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos(2x)}{x^2}\frac{1}{1+\sqrt{\cos(2x)}} + \sqrt{\cos(2x)}\frac{1-\cos x}{x^2}\right) = \\ &= \frac{9}{4} + 1 + \frac{1}{2} = \frac{15}{4}. \end{aligned}$$

vi) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2} + \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$

vii) Din definiţia părţii întregi avem:

$$\frac{1}{x} - 1 < \left[\frac{1}{x}\right] \leq \frac{1}{x},$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}^*$. Pentru $x > 0$ vom avea:

$$1 - x < x\left[\frac{1}{x}\right] \leq 1$$

şi deci $\lim\limits_{x \searrow 0} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1$. Pentru $x < 0$ obţinem

$$1 \leq x\left[\frac{1}{x}\right] < 1 - x$$

şi deci $\lim\limits_{x \nearrow 0} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1$. Atunci $\lim\limits_{x \to 0} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1$.

viii) Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem că

$$\frac{x^n - \sin^n x}{x^{n+2}} = \frac{x - \sin x}{x^3}\left(1 + \frac{\sin x}{x} + \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{n-1}\right).$$

Cum $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, iar

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \frac{1}{6},$$

rezultă că $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^n - \sin^n x}{x^{n+2}} = \frac{n}{6}$.

ix) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x + \sin x}{x + \cos x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1 + \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\cos x}{x}} = 1.$

x) Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem că

$$\frac{x^n - \ln^n(x+1)}{x^{n+1}} = \frac{x - \ln(x+1)}{x^2}\left(1 + \frac{\ln(x+1)}{x} + \left(\frac{\ln(x+1)}{x}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\ln(x+1)}{x}\right)^{n-1}\right).$$

Cum $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \ln(1+x)^{1/x} = \ln e = 1$, iar

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \ln(x+1)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \frac{1}{x+1}}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2(x+1)} = \frac{1}{2},$$

rezultă că $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^n - \ln^n(x+1)}{x^{n+1}} = \frac{n}{2}$.

xi) Avem:

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0}\left(\frac{a^{\sin x} + b^{\tan x}}{2}\right)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \to 0}\left[\left(1 + \frac{a^{\sin x} + b^{\tan x} - 2}{2}\right)^{\frac{2}{a^{\sin x} + b^{\tan x} - 2}}\right]^{\frac{a^{\sin x} + b^{\tan x} - 2}{x}} = \\ &= e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln(ab)} = ab\end{aligned}$$

deoarece

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^{\sin x} + b^{\tan x} - 2}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{a^{\sin x} - 1}{\sin x}\frac{\sin x}{x} + \lim_{x \to 0} \frac{b^{\tan x} - 1}{\tan x}\frac{\tan x}{x} = \ln a + \ln b.$$

xii) $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{2^x + 3^x + 4^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{3}\left(\lim\limits_{x \to 0} \frac{2^x - 1}{x} + \lim\limits_{x \to 0} \frac{3^x - 1}{x} + \lim\limits_{x \to 0} \frac{4^x - 1}{x}\right)} = e^{\ln \sqrt[3]{24}} = \sqrt[3]{24}$

xiii) Din (*vii*) avem că $\lim_{x\to\infty}\frac{[x]}{x}=1$ şi atunci

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-[x]}{2x-[x]+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{[x]}{x}}{2-\frac{[x]}{x}+\frac{1}{x}}=0.$$

xiv)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin x}-e^{\tan x}}{e^{\sin 2x}-e^{\tan x}} &= \lim_{x\to0}\frac{e^{\sin x-\tan x}-1}{\sin x-\tan x}\frac{\sin 2x-\tan x}{e^{\sin 2x-\tan x}-1}\frac{\sin x-\tan x}{\sin 2x-\tan x}=\\ &= \lim_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{\cos x}}{2\cos x-\frac{1}{\cos x}}=0.\end{aligned}$$

xv) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+\sqrt{x}+3}{2x+1}\right)^{\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sqrt{x}+2}{2x+1}\right)^{\sqrt{x}}=e^{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2\sqrt{x}}{2x+1}\right)}=\sqrt{e}$

xvi) $\lim_{x\to1}\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})(1-\sqrt[4]{x})}{(1-x)^3}=\lim_{x\to1}\frac{1}{1+\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{1+\sqrt[3]{x}+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{1+\sqrt[4]{x}+\left(\sqrt[4]{x}\right)^2+\left(\sqrt[4]{x}\right)^3}=\frac{1}{24}.$

xvii) $\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos x+2\sin x)}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos x+2\sin x)}{x}\frac{x}{\sin x}=\ln e^{\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1+2\sin x}{x}}=\ln e^2=2.$

xviii) Avem că $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[n]{\cos x}-\sqrt[m]{\cos x}}{\tan^2\frac{x}{2}}=\lim_{x\to0}4\left(\frac{\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}}\right)^2\left(\frac{1-\sqrt[m]{\cos x}}{x^2}-\frac{1-\sqrt[n]{\cos x}}{x^2}\right)$. Deoarece

$$\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{x}{2}}{\tan\dfrac{x}{2}}=1,$$

iar, pentru $p\in\mathbb{N}$, $p\geq 2$:

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt[p]{\cos x}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}\frac{1}{1+\sqrt[p]{\cos x}+\sqrt[p]{\cos^2 x}+\ldots+\sqrt[p]{\cos^{p-1}x}}=\frac{1}{2p},$$

rezultă că

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[n]{\cos x}-\sqrt[m]{\cos x}}{\tan^2\frac{x}{2}}=2\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right).$$

Soluţie 1.2 *i)* Deoarece $kx-1<[kx]\leq kx$, pentru orice $k=\overline{1,n}$, vom avea:

$$\frac{n(n+1)}{2}x-n=\sum_{k=1}^{n}(kx-1)<\sum_{k=1}^{n}\left[kx\right]\leq\sum_{k=1}^{n}kx=\frac{n(n+1)}{2}x$$

şi deci

$$\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n}{x}<\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\left[kx\right]}{x}\leq\frac{n(n+1)}{2},$$

pentru orice $x>0$. Conform *Teoremei cleştelui*, rezultă că $\lim_{x\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\left[kx\right]}{x}=\frac{n(n+1)}{2}$.

ii) Deoarece $\lim_{x\to0}x^2\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\frac{k}{x^2}\right]=\lim_{y\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\left[ky\right]}{y}$ rezultă că $\lim_{x\to0}x^2\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\frac{k}{x^2}\right]=\frac{n(n+1)}{2}$.

iii) Avem că $\lim\limits_{x\to 0} x^3 \sum\limits_{k=1}^{n} \left[\frac{k^2}{x^2}\right] = \lim\limits_{x\to 0} x\Big(x^2 \sum\limits_{k=1}^{n} \left[\frac{k^2}{x^2}\right]\Big)$. Analog ca mai sus se obţine că

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{k^2}{x^2}\right] = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

şi deci $\lim\limits_{x\to 0} x^3 \sum\limits_{k=1}^{n} \left[\frac{k^2}{x^2}\right] = 0$

Soluţie 1.3 Reciproca afirmaţiei este imediată. Să arătăm acum implicaţia directă. Presupunem, prin reducere la absurd că f nu este constantă. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $f(a) \neq f(b)$. Considerând şirurile

$$x_n = a + nT,\ n \geq 1$$

şi

$$y_n = b + nT,\ n \geq 1,$$

unde $T > 0$ este o perioadă a funcţie f, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$ dar, fiind şiruri constante, avem că $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a) \neq f(b) = \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$. Conform Teoremei lui Heine, rezultă că f nu are limită la $+\infty$. *Contradicţie.*

Soluţie 1.4 *i*) Avem

$$\lim_{x\nearrow 2} f(x) = \lim_{x\nearrow 2} \frac{x^2+2x+a}{x-2} = \begin{cases} +\infty & ,\ a < -8 \\ -\infty & ,\ a > -8 \\ \lim\limits_{x\nearrow 2}(x+4) = 6 & ,\ a = -8 \end{cases},$$

iar

$$\lim_{x\searrow 2} f(x) = \lim_{x\searrow 2} \Big(3\sqrt{1-\cos\frac{\pi x}{2}} + b\Big) = 3\sqrt{2} + b = f(2).$$

Atunci, funcţia f este continuă în $x_0 = 2$ dacă şi numai dacă $\lim\limits_{x\nearrow 2} f(x) = \lim\limits_{x\searrow 2} f(x) = f(2)$ ceea ce este echivalent cu faptul că $a = -8$ şi $3\sqrt{2} + b = 6$ (deci $b = 6 - 3\sqrt{2}$). În caz contrar funcţia f este discontină în $x_0 = 2$.

ii) Pentru $x \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ avem că $\left[x + \frac{1}{2}\right] = 1$ şi deci $f(x) = |x-1|$. Atunci

$$\lim_{x\nearrow \frac{3}{2}} f(x) = \lim_{x\nearrow \frac{3}{2}} |x-1| = \frac{1}{2}.$$

Pentru $x \in (\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ avem că $\left[x + \frac{1}{2}\right] = 2$ şi deci $f(x) = |x-2|$. Atunci

$$\lim_{x\searrow \frac{3}{2}} f(x) = \lim_{x\searrow \frac{3}{2}} |x-2| = \frac{1}{2}.$$

Deorece $f(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}$ rezultă că $\lim\limits_{x\nearrow \frac{3}{2}} f(x) = \lim\limits_{x\searrow \frac{3}{2}} f(x) = f(\frac{3}{2})$ şi deci, funcţia f este continuă în $x_0 = \frac{3}{2}$.

iii) Deoarece

$$\lim_{\substack{x \to \frac{1}{3} \\ x \in \mathbb{Q}}} f(x) = \lim_{\substack{x \to \frac{1}{3} \\ x \in \mathbb{Q}}} x = \frac{1}{3},$$

iar

$$\lim_{\substack{x \to \frac{1}{3} \\ x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}} f(x) = \lim_{\substack{x \to \frac{1}{3} \\ x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}} (1-x) = \frac{2}{3},$$

rezultă că funcţia f nu are limită în $x_0 = \frac{1}{3}$, deci nu este nici continuă în acest punct.

Soluţie 1.5 *i)* Conform definiţiei părţii fracţionare ($\{x\} = x - [x]$), vom avea că

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)(2-x) & , \quad x \in [1,\, 2) \\ (x-2)(3-x) & , \quad x \in [2,\, 3) \end{cases}$$

Atunci $\lim\limits_{x \nearrow 2} f(x) = \lim\limits_{x \searrow 2} f(x) = 0 = f(2)$. În particular, rezultă că f este continuă în $x = 2$.

ii) Analog ca mai sus se arată că f este continuă în orice $x \in \mathbb{Z}$. Deoarece funcţia ”parte fracţionară” este o funcţie cotinuă pe $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, rezultă că f este continuă pe $\mathbb{R}$.

Funcţia f este periodică de perioadă $T = 1$ şi deci

$$\operatorname{Im} f = f(\mathbb{R}) = f([0,\, 1]) = \{x(1-x) \,:\, x \in [0,\, 1]\} = \big[0,\, \frac{1}{4}\big].$$

iii) Funcţia f este periodică de perioadă $T = 1$ şi neconstantă. Conform exerciţiului anterior, rezultă că f nu are limită la $+\infty$.

Soluţie 1.6 *i)* Deoarece $f_{|(-\infty,\, 1]}$ şi $f_{|(1,\, \infty)}$ sunt continue, rezultă că funcţia f este continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Deducem că f este continuă pe $\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă este continuă în $x = 1$, ceea ce este echivalent cu

$$\lim_{x \nearrow 1} f(x) = \lim_{x \searrow 1} f(x) = f(1).$$

Deci $4 = 2a + 2$, ceea ce arată că $a = 1$.

ii) Funcţia f nu are asimptote verticale. Cum

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (3^x + 1) = 1 \in \mathbb{R},$$

rezultă că dreapta de ecuaţie $y = 1$ este asimptotă orinzontală spre $-\infty$.

Dacă $a = 0$ atunci dreapta de ecuaţie $y = 2$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$, iar dacă $a \neq 0$, atunci

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \Big(a\sqrt{3 + \frac{1}{x^2}} + \frac{2}{x}\Big) = a\sqrt{3} \in \mathbb{R},$$

iar

$$\lim_{x \to \infty} \big(f(x) - a\sqrt{3}x\big) = \lim_{x \to \infty} \Big(\frac{a^2}{a\sqrt{3x^2+1} + a\sqrt{3}x} + 2\Big) = 2 \in \mathbb{R}.$$

Deci dreapta de ecuaţie $y = a\sqrt{3}x + 2$ este asimptotă oblică spre $+\infty$.

Soluţie 1.7 Deoarece $f_{|(-\infty,\, 0]}$ şi $f_{|(0,\, \infty)}$ sunt continue, rezultă că funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}^*$. Deducem că f este continuă pe $\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă este continuă în $x = 0$, ceea ce este echivalent cu

$$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} f(x) = f(0).$$

Deci $0 = b$.

Avem că $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}$ există, dacă şi numai dacă

$$\lim_{x \nearrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \searrow 0} \frac{f(x)}{x},$$

adică

$$\lim_{x \nearrow 0} (ae^x - 1) = \lim_{x \searrow 0} \cos x$$

şi deci $a - 1 = 1$ sau echivalent, $a = 2$.

Soluţie 1.8 Ţinând cont de operaţiile cu funcţii continue, rezultă că funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}^*$. Cum

$$-x^3 \leq x^3 \sin \frac{1}{x^2} \leq x^3,$$

pentru orice $x > 0$, rezultă că

$$\lim_{x \searrow 0} x^3 \sin \frac{1}{x^2} = 0.$$

De asemenea

$$x^3 \leq x^3 \sin \frac{1}{x^2} \leq -x^3,$$

pentru orice $x < 0$ şi deci

$$\lim_{x \nearrow 0} x^3 \sin \frac{1}{x^2} = 0.$$

Deci există $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$, ceea ce arată că funcţia f este continuă şi în $x = 0$, deci pe $\mathbb{R}$.

Proprietatea de continuitate a funcţie f arată că $Im\, f$ este un interval din $\mathbb{R}$. Dar

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} x \frac{\sin \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \infty \cdot 1 = \infty,$$

iar

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x \frac{\sin \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = (-\infty) \cdot 1 = -\infty.$$

Aceasta arată că $Im\, f$ este un interval nemărginit atât inferior cât şi superior şi deci $Im\, f = \mathbb{R}$.

Soluţie 1.9 Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem că $f(x) \in \left\{0, 2\right\}$ (singurele soluţii ale ecuaţie $t^2 = 2t$).

Presupunând prin absurd că există o funcţie continuă neconstantă ce verifică relaţia dată, ar rezulta că $Im\, f = \left\{0, 2\right\}$, ceea ce vine în contradicţie cu faptul că $Im\, f$ este un interval (imaginea printr-o funcţie continuă a oricărui interval este un interval). Rezultă că singurele funcţii continue cu proprietatea că $f^2(x) = 2f(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, sunt funcţiile constante $f = 0$ şi $f = 2$.

Soluţie 1.10 *i*) Funcţia $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - x$ este continuă şi deci $Im\, g$ este un interval cu $g(a), g(b) \in Im\, g$. Cum $g(a) = f(a) - a \geq 0$, iar $g(b) = f(b) - b \leq 0$, rezultă că $0 \in \left[g(a), g(b)\right] \subset Im\, g$. Atunci $0 \in Im\, g$ şi deci există $x_0 \in [a, b]$ astfel ca $g(x_0) = 0$ sau echivalent $f(x_0) = x_0$.

ii) Raţionament analog ca mai sus pentru $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) + x - a - b$.

iii) Raţionament analog punctului (*i*) pentru $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) + f(a + b - x) - 2x$.

Soluţie 1.11 Funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (2x+1)\ln x + 3x + 1$ este strict crescătoare (deci injectivă), continuă, iar

$$\lim_{x \searrow 0} f(x) = -\infty,$$

iar

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$

Atunci $Im\, f$ este un interval nemărginit atât inferior cât şi superior şi deci $Im\, f = \mathbb{R}$. Rezultă că $0 \in Im\, f$ şi deci există $x_0 > 0$ astfel ca $f(x_0) = 0$ ceea ce este echivalent cu faptul că x_0 este soluţie a ecuaţiei date. Injectivitatea lui f asigură unicitatea acesteia.

Soluţie 1.12 *i*) Funcţia f fiind continuă pe $\mathbb{R}$ rezultă că f nu are asimptote verticale.

Cum $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+2x+5}{\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to\infty} x\dfrac{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \infty$ rezultă că f nu are asimptote orizontale spre $+\infty$.

Dar

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1 \in \mathbb{R}^*,$$

iar

$$n = \lim_{x\to\infty} \big(f(x)-mx\big) = \lim_{x\to\infty} \Big(\frac{x^2-x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{2x+5}{\sqrt{x^2+1}}\Big) = 2 + \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2}{(x^2+x\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}} = 2 \in \mathbb{R}$$

rezultă că dreapta de ecuaţie $y = x+2$ este asimptotă oblică la graficul funcţie f spre $+\infty$.

De asemenea $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+2x+5}{\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to-\infty} (-x)\dfrac{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -\infty$ şi deci f nu are asimptote orizontale spre $-\infty$.

Dar

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -1 \in \mathbb{R}^*,$$

iar

$$n = \lim_{x\to-\infty} \big(f(x)-mx\big) = \lim_{x\to-\infty} \Big(\frac{x^2+x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{2x+5}{\sqrt{x^2+1}}\Big) = -2 + \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2}{(x^2-x\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}} = -2$$

rezultă că dreapta de ecuaţie $y = -x-2$ este asimptotă oblică la graficul funcţie f spre $-\infty$.

ii) Cum $\lim\limits_{x\searrow -2} f(x) = \lim\limits_{x\searrow -2} \ln\dfrac{2+x}{2-x} = -\infty$, rezultă că dreapta de ecuaţie $x=-2$ este asimptotă verticală la dreapta.

De asemenea, $\lim\limits_{x\nearrow 2} f(x) = \lim\limits_{x\nearrow 2} \ln\dfrac{2+x}{2-x} = +\infty$, ceea ce arată că dreapta de ecuaţie $x = 2$ este asimptotă verticală la stânga.

Bineînţeles, problema asimptotelor orizontale sau oblice nu se pune pentru funcţia f.

iii) Funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$ şi deci nu are asimptote verticale.

Cum $f(x) \geq x-1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, rezultă că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ şi deci f nu are asimptote orizontale spre $+\infty$.

Avem că

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \Big(1 - \frac{\sin x}{x}\Big) = 1 \in \mathbb{R}^*,$$

dar $f(x) - mx = -\sin x$ (funcţie periodică neconstantă) şi deci nu există limita spre $+\infty$ a funcţie $f(x) - mx$. Obţinem astfel că f nu are nici asimptotă oblică spre $+\infty$.

Analog se arată că f nu are nici asimptote orizontale sau oblice spre $-\infty$.

Soluţie 1.13 Funcţia $h : [0,\, 1] \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - g(x)$ este conţinuă. Cum funcţia g este surjectivă, va exista $a, b \in [0,\, 1]$ astfel ca $g(a) = 0$, iar $g(b) = 1$. Atunci $h(a) = f(a) \geq 0$, iar $h(b) = f(b) - 1 \leq 0$. Cum $Im\, h$ este un interval, rezultă că acesta-l va conţine pe 0 şi deci există $x_0 \in [0,\, 1]$ astfel ca $h(x_0) = 0$ sau echivalent $f(x_0) = g(x_0)$.

Capitolul 2

Derivabilitate.

2.1 Scurt breviar teoretic

Fie $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie, iar $x_0 \in I$ (vom presupune în continuare că I este un interval).

Definiţia 2.1.1 *Spunem că funcţia f este:*

i) Derivabilă la stânga în punctul $x_0 \in I$ dacă există şi este finită

$$\lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'_s(x_0) \text{ (numită derivata la stânga a funcţie } f \text{ în } x_0\text{).}$$

ii) Derivabilă la dreapta în punctul $x_0 \in I$ dacă există şi este finită

$$\lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'_d(x_0) \text{ (numită derivata la dreapta a funcţie } f \text{ în } x_0\text{).}$$

iii) Derivabilă în punctul $x_0 \in I$ dacă există şi este finită

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0) \text{ (numită derivata funcţie } f \text{ în } x_0\text{).}$$

iv) Derivabilă la stânga (resp. dreapta, resp. derivabilă) pe $J \subset I$ dacă este derivabilă la stânga (resp. dreapta, resp derivabilă) în orice $x_0 \in J$

Remarca 2.1.1 1. Orice funcţie derivabilă într-un punct este şi continuă în acel punct.

2. Dacă pentru funcţia $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ notăm cu J submulţimea maximală a lui I pe care funcţia f este derivabilă (presupunem că $J \neq \emptyset$), aplicaţia

$$f' : J \to \mathbb{R}, \quad J \ni x \mapsto f'(x)$$

se numeşte derivata de ordinul întâi a funcţie f.

3. Dacă funcţia f este derivabilă în $x_0 \in I$ atunci dreapta de ecuaţie

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

se numeţe *tangenta la graficul funcţie f în punctul de coordonate* $(x_0, f(x_0))$.

Legătura dintre operaţiile cu funcţii şi derivabilitate este dată în următoarele afirmaţii, unde $f, g : I \to \mathbb{R}$, iar $x_0 \in I$:

Propoziţia 2.1.1 *Dacă f şi g sunt derivabile în x_0 atunci $f+g$ este derivabilă în x_0 şi*

$$\big(f+g\big)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Propoziţia 2.1.2 *Dacă f este derivabilă în x_0, iar $k \in \mathbb{R}$ atunci kf este derivabilă în x_0 şi*

$$\big(kf\big)'(x_0) = kf'(x_0).$$

Propoziţia 2.1.3 *Dacă f şi g sunt derivabile în x_0 atunci $f \cdot g$ este derivabilă în x_0 şi*

$$\big(f \cdot g\big)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0).$$

Propoziţia 2.1.4 *Dacă f şi g sunt derivabile în x_0, iar $g(x) \neq 0$ pentru orice $x \in I$, atunci $\dfrac{f}{g}$ este derivabilă în x_0 şi*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x)}.$$

Propoziţia 2.1.5 (derivabilitatea compusei a două funcţii) *Dacă $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$, iar $x_0 \in I$ astfel încât funcţia f este derivabilă în x_0, iar funcţia g este derivabilă în $g(x_0) \in J$ atunci funcţia $g \circ f$ este derivabilă în x_0 şi*

$$\big(g \circ f\big)'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big) \cdot f'(x_0).$$

Propoziţia 2.1.6 (Derivabilitatea funcţie inverse) *Dacă $f : I \to J$ este o funcţie bijectivă, iar $x_0 \in I$ astfel încât:*

i) *f este derivabilă în x_0 şi $f'(x_0) \neq 0$,*

ii) *$f^{-1} : J \to I$ este continuă în $f(x_0)$,*

atunci funcţia f^{-1} este derivabilă în $f(x_0)$ şi $\big(f^{-1}\big)'(f(x_0)) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

În problemele concrete ce cer sau în care avem nevoie, la un moment dat de calcularea derivatei unei funcţii sunt utile următaorele formule de derivare a funcţiilor compuse (prezentate mai jos formalizate).

Dacă u este derivabilă şi verifică proprietăţi ce o fac compatibilă cu operaţia de compunere în care apare mai jos, atunci

- $\big(u^\alpha\big)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$, unde $\alpha \in \mathbf{R}$ (în particular $\big(\sqrt{u}\big)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$);
- $\big(a^u\big)' = a^u \ln a \cdot u'$, unde $a \in \mathbf{R}_+^*$ (în particular $\big(e^u\big)' = e^u \cdot u'$);
- $\big(\log_a u\big)' = \dfrac{1}{u \ln a} \cdot u'$, unde $a \in \mathbf{R}_+^*$, $a \neq 0$ (în particular $\big(\ln u\big)' = \dfrac{u'}{u}$);
- $\big(\sin u\big)' = u' \cos u$;
- $\big(\cos u\big)' = -u' \sin u$;
- $\big(\operatorname{tg} u\big)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$;
- $\big(\operatorname{ctg} u\big)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$;
- $\big(\arcsin u\big)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;

- $\big(\arccos u\big)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;
- $\big(\operatorname{arctg} u\big)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$;
- $\big(\operatorname{arcctg} u\big)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$.

Definiţia 2.1.2 *Fie $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, iar $n \in \mathbb{N}$. Vom spune că funcţia f este de $n+1$-ori derivabilă în x_0, dacă există U o vecinătate a lui x_0 pe care funcţia f să fie de n-ori derivabilă, iar derivata sa de ordin n, notată $f^{(n)}$, să fie derivabilă în punctul x_0. În acest caz $\big(f^{(n)}\big)'(x_0) =: f^{(n+1)}(x_0)$ e numeşte derivata de ordinul $n+1$ a funcţie f ın punctul x_0.*

Utilă în studiul derivabilităţi de ordin n dar şi în calculul derivatei de ordinul n al unui produs de funcţiie derivabile este:

Propoziţia 2.1.7 (Formula Leibnitz-Newton) *Dacă f şi g sunt două funcţii de n-ori derivabile într-un punct x_0 atunci $f \cdot g$ este şi ea de n-ori derivabilă în x_0 şi*

$$\big(f \cdot g\big)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{C}_n^k f^{(n-k)}(x_0) g^{(k)}(x_0),$$

unde, convenţional, pentru o funcţie h notăm $h^{(0)} = h$.

Importanţa derivatelor unei funcţii este dată de aportul pe care-l aduc acestea la studiul comportării acesteia. Reamintim în continuare câteva rezultate teoretice utilizate în studiul unei funcţii derivabile.

Teorema 2.1.8 (Teorema lui Fermat) *Fie $f : I \to \mathbb{R}$, iar x_0 un punct din interiorul intervalului I (nu este extremitate a acestuia) în care funcţia f este derivabilă. Dacă x_0 este punct de extrem local atunci $f'(x_0) = 0$ (spunem că x_0 este punct critic al fuyncţiei f).*

Remarca 2.1.2 Rezultatul anterior arată că punctele de extrem local din interiorul domeniului (atenţie!) al unei funcţii derivabile se află printre rădăcinile primei sale derivate (soluţii ale ecuaţiei $f'(x) = 0$).

Teorema 2.1.9 (Teorema lui Rolle) *Fie $f : [a,\, b] \to \mathbb{R}$ asfel încât:*

i) f este continuă pe $[a,\, b]$;

ii) f este derivabilă pe $(a,\, b)$;

iii) $f(a) = f(b)$.

Atunci există $c \in (a,\, b)$ astfel încât $f'(c) = 0$ (i.e. tangenta la graficul funcţie în punctul de coordonate $(c, f(c))$ este paralelă cu axa Ox).

Remarca 2.1.3 Teorema lui Rolle arată că între două puncte critice *consecutive* ale unei funcţii derivabile pe un interval există cel mult o rădăcină a acesteia. Este rezultatul ce stă la baza metodei *şirului lui Rolle* ce permite determinarea numărului de rădăcini ale unei funcţii derivabile pe un interval.

Teorema 2.1.10 (Teorema lui Lagrange) *Fie $f : [a,\, b] \to \mathbb{R}$ asfel încât:*

i) f este continuă pe $[a,\, b]$;

ii) f este derivabilă pe $(a,\, b)$;

Atunci există $c \in (a,\, b)$ astfel încât $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ (i.e. tangenta la graficul funcţie în punctul de coordonate $(c, f(c))$ este paralelă cu dreapta determinată de punctele de pe grafic de coordonate $(a, f(a))$ şi respectiv $(b, f(b))$).

Pentru studiul variaţiei unei funcţii definite pe un interval (atenţie!) este utilă următoarea consecinţă a Teoremei lui Lagrange:

Corolarul 2.1.1 *Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe I şi derivabilă pe interiorul să (notat* $\mathrm{Int}(I)$*).*

i) Dacă $f'(x) = 0$, pentru orice $x \in \mathrm{Int}(I)$ atunci funcţia f este constantă pe I.

ii) Dacă $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$) pentru orice $x \in \mathrm{Int}(I)$ atunci funcţia f este monoton crescătoare (resp. descrescătoare) pe I.

iii) Dacă $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$) pentru orice $x \in \mathrm{Int}(I)$, dar mulţimea

$$A = \{x \in \mathrm{Int}(I) \,:\, f'(x) = 0\}$$

nu conţine nici un interval, atunci funcţia f este **strict** *crescătoare (resp.* **strict** *descrescătoare) pe I.*

Derivatele de ordinul doi sunt utilizate pentru studiul convexităţii sau concavităţii unei funcţii pe un interval.

Definiţia 2.1.3 *Vom spune că funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ este convexă (resp. concavă) pe I, dacă, pentru orice $a, b \in I$ şi $t \in [0,\, 1]$ rezultă că*

$$f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b) \qquad (\text{resp. } f((1-t)a + tb) \geq (1-t)f(a) + tf(b)\ ).$$

Din punct de vedere geometric, o funcţie este convexă pe I dacă pentru orice $a, b \in I$, segmentul de capete $(a, f(a))$ şi $(b, f(b))$ se află ”deasupra” graficului restricţie funcţie f la intervalul de extremităţi a respectiv b.

Are loc

Propoziţia 2.1.11 *Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie de două ori derivabilă pe intervalul I.*

i) Dacă $f''(x) \geq 0$, pentru orice $x \in I$ atunci funcţia f este convexă pe intervalul I.

ii) Dacă $f''(x) \leq 0$, pentru orice $x \in I$ atunci funcţia f este concavă pe intervalul I.

Derivata a doua este utilizată şi în stabilirea naturii punctelor critice ale unei funcţii, deoerece are loc:

Propoziţia 2.1.12 *Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie de două ori derivabiă pe I, iar $x_0 \in \mathrm{Int}(I)$ un punct critic al său (deci $f'(x_0) = 0$).*

i) Dacă $f''(x_0) > 0$ atunci x_0 este punct de minim local pentru f.

ii) Dacă $f''(x_0) < 0$ atunci x_0 este punct de maxim local pentru f.

2.2 Probleme propuse

Exerciţiul 2.1 *Studiaţi derivabilitatea următoarelor funcţii, calculând şi derivata acestora:*

i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x-a| + x|x-b|$, *unde* $a, b \in \mathbb{R}$.

ii) $f : \left[\frac{1}{e}, e\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin|\ln x|$.

iii) $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\frac{1}{x} & , \quad x > 0 \\ m & , \quad x = 0 \end{cases}$, *unde* $\alpha, m \in \mathbb{R}$.

Exerciţiul 2.2 *Fie* $a, b \in \mathbb{R}$ *şi* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} axe^x - x & , \quad x \le 0 \\ x\cos x + b & , \quad x > 0 \end{cases}$. *Să se determine valorile* $a, b \in \mathbb{R}$ *astfel încât funcţia* f *să fie derivabilă pe* $\mathbb{R}$.

Exerciţiul 2.3 *Fie funcţia* $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \ln x$. *Să se demonstreze că:*

i) f *este bijectivă;*

ii) f^{-1} *este derivabilă pe* $\mathbb{R}$ *şi să se calculeze* $\left(f^{-1}\right)'(1)$ *şi* $\left(f^{-1}\right)'(e+1)$.

Exerciţiul 2.4 *Determinaţi domeniul maxim de derivabilitate şi punctele de extrem ale funcţiei*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{|x^2 - x|}.$$

Exerciţiul 2.5 *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan(x+2) - \arctan x$.

i) Determinaţi f'*;*

ii) Arătaţi că $0 < f(x) \le \frac{\pi}{2}$ *pentru orice* $x \in \mathbb{R}$*;*

iii) Arătaţi că $\arctan(x+2) = \frac{\pi}{2} + \arctan x - \arctan\frac{(x+1)^2}{2}$, *pentru orice* $x \in \mathbb{R}$.

Exerciţiul 2.6 *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - \sin x$.

i) Arătaţi că funcţia f *este strict crescătoare pe* $\mathbb{R}$*;*

ii) Arătaţi că funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt[3]{f(x)}$ *este derivabilă pe* $\mathbb{R}$.

Exerciţiul 2.7 *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - \frac{x^3}{6} - \sin x$.

i) Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$*;*

ii) Determinaţi derivata a doua a funcţie f.

iii) Arătaţi că $f(x) \le 0$, *pentru orice* $x \in \mathbb{R}_+$ *şi determinaţi soluţiile reale ale ecuaţiei* $f(x) = 0$.

Exerciţiul 2.8 *În fiecare din cazurile următoare, determinaţi* $a \in \mathbb{R}$ *astfel încât:*

i) $e^x \ge ax + 1$, *pentru orice* $x \in \mathbb{R}$*;*

ii) $a^x + 2^x \ge 3^x + 4^x$, *pentru orice* $x \in \mathbb{R}$.

Exerciţiul 2.9 *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + e^{-x}$.

i) Arătaţi că funcţia f este stric crescătoare pe $[0, +\infty)$;

ii) Determinaţi punctele de extrem local ale funcţie f;

iii) Determinaţi numărul soluţilor reale ale ecuaţiei $f(x) = m$, unde $m \in \mathbb{R}$.

Exerciţiul 2.10 *Fie* $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{e^{|x|}}{x+2}$.

i) Studiaţi derivabilitatea funcţie f în punctul $x = 0$;

ii) Determinaţi punctele de extrem local ale funcţie f;

iii) Determinaţi numărul soluţilor reale ale ecuaţiei $f(x) = m$, unde $m \in \mathbb{R}$.

Exerciţiul 2.11 *Considerăm mulţimea de funcţii*

$$M = \{f : [-1, 1] \to \mathbb{R} \,:\, f \text{ de două ori derivabilă }, f(0) = 0, f'(0) = 1\}.$$

i) Să se arate că funcţia $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x \sin x$ aparţine mulţimii M.

ii) Să se arate că dacă $f(x) \neq 0$, pentru orice $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ atunci $\lim\limits_{x\to 0} \Big(1 + f(x)\Big)^{\frac{1}{x}} = e$.

iii) Să se arate că dacă $f \in M$ atunci $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f^n(x) - x^n}{x^{n+1}} = \dfrac{nf''(0)}{2}$.

Exerciţiul 2.12 *Determinaţi $f^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, pentru următoarele funcţii:*

i) $f : \mathbb{R} \setminus \Big\{-\dfrac{b}{a}\Big\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{ax+b}$, *unde* $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$;

ii) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(2x+1)$;

iii) $f : \mathbb{R} \setminus \Big\{-\dfrac{1}{2}, 2\Big\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{(2x+1)(x-2)}$;

iv) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + x + 1)e^{-2x}$.

2.3 Soluţii - Derivabilitate

Soluţie 2.1 *i)* Deoarece funcţia $\mathbb{R} \ni x \mapsto |x| \in \mathbb{R}$ este derivabilă pe $\mathbb{R}^*$, conform teoremelor de derivabilitate a sumei, produsului şi a compunerii de funcţii derivabile, rezultă că funcţia f este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{a, b\}$. Vom studia în continuare derivabilitatea funcţie f în punctele $x = a$ şi respectiv $x = b$.

Cazul 1. Dacă $b = a$, atunci $f(x) = (x+1)|x-a|$, $x \in \mathbb{R}$ şi deci

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \begin{cases} -x-1 & , \quad x < a \\ x+1 & , \quad x > a \end{cases}$$

Aceasta arată că există $f'_s(a) = -a-1$ şi $f'_d(a) = a+1$.

Dacă $a = -1 (= b)$ atunci f este derivabilă şi în $x = a (= -1)$, deci pe $\mathbb{R}$, cu

$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f'(x) = \begin{cases} -2(x+1) & , \quad x < -1 \\ 2(x+1) & , \quad x \geq -1 \end{cases}$$

Dacă $a \neq -1$ atunci f nu este derivabilă în $x = a$ şi atunci

$$f' : \mathbb{R} \setminus \{a\} \to \mathbb{R}, \quad f'(x) = \begin{cases} -2x+a-1 & , \quad x < a \\ 2x-a+1 & , \quad x > a \end{cases}$$

Cazul 2. Dacă $b \neq a$. Pentru a fixa ideile, să presupunem că $a < b$. Avem că

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} -x^2+(b-1)x+a & , \quad x < a \\ -x^2+(b+1)x-a & , \quad x \in [a, b) \\ x^2-(b-1)x-a & , \quad x \geq b \end{cases}$$

Atunci $f'_s(a) = -2a+b-1 \neq -2a+b+1 = f'_d(a)$, ceea ce arată că f nu este derivabilă în $x = a$. De asemenea, $f'_s(b) = -b+1$, iar $f'_d(b) = b+1$ şi deci funcţia f este derivabilă în $x = b$ dacă şi numai dacă $b = 0$. Atunci, pentru $b \neq 0$

$$f' : \mathbb{R} \setminus \{a, b\} \to \mathbb{R}, \quad f'(x) = \begin{cases} -2x+b-1 & , \quad x < a \\ -2x+b+1 & , \quad x \in (a, b) \\ 2x-b+1 & , \quad x > b \end{cases},$$

iar pentru $b = 0$ (cu $a < 0$) avem:

$$f' : \mathbb{R} \setminus \{a\} \to \mathbb{R}, \quad f'(x) = \begin{cases} -2x-1 & , \quad x < a \\ -2x+1 & , \quad x \in (a, 0) \\ 2x+1 & , \quad x \geq 0 \end{cases}.$$

ii) Funcţia $[-1, 1] \ni x \mapsto \arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ este derivabilă pe $(-1, 1)$, iar funcţia $\left(\frac{1}{e}, e\right) \ni x \mapsto |\ln x| \in (-1, 1)$ este drivabilă pe $\left(\frac{1}{e}, e\right) \setminus \{1\}$. Conform teoremei de derivabilitate a compusei a două funcţii derivabile, rezultă că funcţia f este derivabilă pe $\left(\frac{1}{e}, e\right) \setminus \{1\}$. În plus

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} & , \quad x \in \left(\dfrac{1}{e}, 1\right) \\ \dfrac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} & , \quad x \in (1, e) \end{cases}$$

Funcţia f este continuă în $x = \frac{1}{e}$ şi există

$$\lim_{x \searrow \frac{1}{e}} f'(x) = \lim_{x \searrow \frac{1}{e}} \left(-\frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}\right) = -\infty \notin \mathbb{R}.$$

Rezultă că funcţia f nu este derivabilă în $x = \dfrac{1}{e}$.

De asemenea, funcţia f este continuă în $x = 1$, dar

$$\lim_{x \nearrow 1} f'(x) = \lim_{x \nearrow 1} \Big(-\frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} \Big) = -1 \neq \lim_{x \searrow 1} f'(x) = \lim_{x \searrow 1} \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} = 1.$$

Obţinem astfel că funcţia f nu este derivabilă nici în $x = 1$.

Pentru studiul derivabilităţii în $x = e$: avem că f este continuă în $x = e$, iar

$$\lim_{x \nearrow e} f'(x) = \lim_{x \nearrow e} \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} = \infty \notin \mathbb{R},$$

cea ce arată că funcţia f nu este derivabilă în $x = e$.

Domeniul maxim de derivabilitate al funcţie f este $\Big(\dfrac{1}{e},\, e\Big) \setminus \{1\}$, cu

$$f' : \Big(\frac{1}{e},\, e\Big) \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, \quad f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} & ,\ x \in \Big(\dfrac{1}{e},\, 1\Big) \\ \dfrac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} & ,\ x \in (1,\, e) \end{cases}$$

iii) Funcţia f este derivabilă pe $(0,\, \infty)$. Rămâne să-i studiem derivabilitatea în punctul $x = 0$.

Cazul 1. Dacă $\alpha \leq 0$ avem că punctul $x = 0$ este punct de discontinuitate (de speţa a II-a) pentru funcţia f, deci aceasta nu este derivabilă în $x = 0$.

Cazul 2. Dacă $\alpha > 0$ avem că există $\lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = 0$ şi atunci:

- dacă $m \neq 0$, punctul $x = 0$ este un punct de discontinuitate pentru f (de speţa I), iar f nu este deci derivabilă în acest punct.

- dacă $m = 0$ atunci, pentru orice $x > 0$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x^{\alpha - 1} \sin \frac{1}{x}.$$

Pentru $\alpha > 1$, rezultă că există

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \searrow 0} x^{\alpha - 1} \sin \frac{1}{x} = 0$$

şi deci f este derivabilă şi în $x = 0$ (deci pe $[0,\, \infty)$) cu

$$f' : [0,\, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f'(x) = \begin{cases} \alpha x^{\alpha-1} \sin \dfrac{1}{x} - x^{\alpha-2} \cos \dfrac{1}{x} & ,\ x > 0 \\ 0 & ,\ x = 0 \end{cases}$$

Pentru $\alpha \in (0,\, 1)$ obţinem că nu există limita în $x = 0$ a raportului $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ şi deci funcţia f nu este derivabilă în $x = 0$.

Soluţie 2.2 *i)* Funcţia f este derivabilă pe $(0,\, \infty)$ şi $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{x} > 0$, pentru orice $x \in (0,\, \infty)$. Atunci f este strict crescătoare şi deci injectivă.

Deoarece funcţia f este continuă rezultă că Im f este un interval. Dar

$$\lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} (x + \ln x) = -\infty,$$

iar

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} (x + \ln x) = \infty.$$

Atunci Im f este un interval nemărginit atât inferior cât şi superior, ceea ce aratăcă Im $f = \mathbb{R}$. Rezultă că f este şi surjectivă, deci funcţie bijectivă.

ii) Funcţia f fiind bijectică, strict crescătoare şi continuă vom avea că $f^{-1} : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ este o funcţie continuă.

Dacă $y_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 = f(x_0), x_0 \in (0, \infty)$ atunci

- f este derivabilă în x_0 cu $f'(x_0) = 1 + \dfrac{1}{x_0} \neq 0$,
- f^{-1} este continuă în y_0

şi deci, conform teoremei de derivabilitate a funcţie inverse, rezultă că f^{-1} este derivabilă în y_0, pentru orice $y_0 \in \mathbb{R}$ (deci derivabilă pe $\mathbb{R}$). În plus

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

În particular

$$\left(f^{-1}\right)'(1) = \left(f^{-1}\right)'(f(1)) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{2},$$

iar

$$\left(f^{-1}\right)'(1+e) = \left(f^{-1}\right)'(f(e)) = \frac{1}{f'(e)} = \frac{e}{1+e},$$

Soluţie 2.3 Deoarece f este derivabilă pe $\mathbb{R}^*$, rezultă că proprietatea de derivabilitate pe $\mathbb{R}$ a funcţiei f este echivalentă cu derivabilitatea sa în $x = 0$ şi deci cu faptul că există:

$$\lim_{x \nearrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \in \mathbb{R}.$$

Dar

$$\lim_{x \nearrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{axe^x - x}{x} = \lim_{x \nearrow 0}(ae^x - 1) = a - 1,$$

iar

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \searrow 0} \frac{x \cos x + b}{x} = \lim_{x \searrow 0}\left(\cos x + \frac{b}{x}\right) = \begin{cases} -\infty & , \quad b < 0 \\ 1 & , \quad b = 0 \\ +\infty & , \quad b > 0 \end{cases}$$

Deci, derivabilitatea funcţie f în $x = 0$ (şi deci şi pe $\mathbb{R}$) este echivalentă cu

$$\begin{cases} b & = & 0 \\ a - 1 & = & 1 \end{cases}$$

ce arată că $a = 2$ şi $b = 0$.

Soluţie 2.4 Să observăm că $f = g \circ u$, unde

$$u : \mathbb{R} \to [0, +\infty), \quad u(x) = |x^2 - x|$$

este continuă pe $\mathbb{R}$ şi derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, iar

$$g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \sqrt{x},$$

este continuă pe $[0, +\infty)$ şi derivabilă pe $(0, +\infty)$.

Ca şi compusă de funcţii continue, rezultă că funcţia f este o funcţie continuă pe $\mathbb{R}$. Din teorema de derivabilitate a funcţiilor compuse, rezultă că f este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, cu

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}} & , \quad x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \\[2ex] \dfrac{1 - 2x}{2\sqrt{x - x^2}} & , \quad x \in (0, 1) \end{cases}$$

Dar

$$\lim_{x \nearrow 0} f'(x) = \lim_{x \nearrow 0} \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}} = -\infty$$

şi deci funcţia f nu este derivabilă în $x = 0$. De asemenea

$$\lim_{x \searrow 1} f'(x) = \lim_{x \searrow 1} \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}} = +\infty$$

şi deci funcţia f nu este derivabilă nici în $x = 1$.

Domeniul maxim de derivabilitate al funcţie f este $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ şi deci

$$f' : \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{R},\ f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}} & ,\quad x \in (-\infty,\ 0) \cup (1,\ +\infty) \\ \dfrac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}} & ,\quad x \in (0,\ 1) \end{cases}$$

Tabelul de variaţie al funcţiei f este:

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$- - - - -$	$\vert$	$++$	0	$--$	$\vert$	$+ + + + +$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Atunci $x = 0$ şi $x = 1$ sunt puncte de minim local (deşi nu sunt puncte critice), iar $x = \dfrac{1}{2}$ este punct de maxim local.

Soluţie 2.5 *i)* Din proprietăţile legate de operaţiile cu funcţii derivabile, rezultă că funcţia f este o funcţie deivabilă pe $\mathbb{R}$, deci $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de

$$f'(x) = \frac{(x+2)'}{1+(x+2)^2} - \frac{1}{1+x^2} = -\frac{4(x+1)}{\big(1+x^2\big)\big(1+(x+2)^2\big)}$$

ii) Avem că $f'(x) = 0$ dacă şi numai dacă $x = -1$, iar tabelul de variaţie al funcţiei f este:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+ + + + +$	0	$- - - - -$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0

Funcţia f fiind strict crescătoare pe intervalul $(-\infty,\ -1]$ şi strict descrescătoare pe $[-1\ +\infty)$, rezultă că

$$0 = \lim_{x \to -\infty} f(x) < f(x) \le f(-1) = \frac{\pi}{2},$$

pentru orice $x \in (-\infty,\ -1]$, şi

$$0 = \lim_{x \to +\infty} f(x) < f(x) \le f(-1) = \frac{\pi}{2},$$

pentru orice $x \in [-1,\ +\infty)$. Deducem astfel că

$$0 < f(x) \le \frac{\pi}{2},$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

iii) Considerâd funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) + \arctan \dfrac{(x+1)^2}{2}$, avem că g este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) - \frac{(x+1)}{1+\frac{(x+1)^4}{4}} = -\frac{4(x+1)}{\big(1+x^2\big)\big(1+(x+2)^2\big)} + \frac{4(x+1)}{4+(x+1)^4} = \\ &= -\frac{4(x+1)}{\big((1+x)^2+2-2(x+1)\big)\big((x+1)^2+2+2(x+1)\big)} + \frac{4(x+1)}{4+(x+1)^4} = \\ &= -\frac{4(x+1)}{((1+x)^2+2)^2-4(x+1)^2} + \frac{4(x+1)}{4+(x+1)^4} = \\ &= -\frac{4(x+1)}{4+(x+1)^4} + \frac{4(x+1)}{4+(x+1)^4} = 0, \end{aligned}$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Rezultă că funcţia g este constantă pe $\mathbb{R}$ şi deci

$$g(x) = g(-1) = \frac{\pi}{2},$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$, ceea ce este echivalent cu concluzia cerută.

Soluţie 2.6 *i)* Funcţia f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ cu $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Aceasta arată că funcţia f este *monoton* crescătoare pe $\mathbb{R}$. Să arăm în continuare că funcţia f este chiar *strict* crescătoare.

Presupunem, prin reducere la absurd, că există $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, astfel încât $f(a) \leq f(b)$. Atunci, pentru orice $x \in [a,\, b]$, cum f este monoton crescătoare, vom avea

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b),$$

şi deci $f(x) = f(a)$. Rezultă că f este constantă pe intervalul $[a,\, b]$, dar atunci, $f'(x) = 0$, pentru orice $x \in [a,\, b]$. Cum însă

$$Z(f') := \{x \in \mathbb{R} \,:\, f'(x) = 0\} = \{2k\pi \,:\, k \in \mathbb{Z}\},$$

ar rezulta că

$$[a,\, b] \subset \{2k\pi \,:\, k \in \mathbb{Z}\},$$

ceea ce reprezintă o contradicţie, căci ultima mulţime $(Z(f'))$ nu conţine nici un interval. Obţinem astfel că funcţia f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

ii) Notând $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \sqrt[3]{x}$, avem că $g = h \circ f$.

Funcţiile f şi h sunt continue pe $\mathbb{R}$ şi deci g este o funcţie continuă pe $\mathbb{R}$.

Funcţia h este derivabilă pe $\mathbb{R}^*$, iar f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi nulă numai în $x = 0$ (fiind strict crescătoare este injectivă). Din teorema de derivabiltate a funcţiilor compuse, rezultă că $g = h \circ f$ este derivabilă pe $\mathbb{R}^*$.

Din teorema lui l'Höspital avem că există

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{\frac{x-\sin x}{x^3}} = \sqrt[3]{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2}} = \sqrt[3]{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x}} = \frac{1}{\sqrt[3]{6}} \in \mathbb{R},$$

ceea ce arată că funcţia g este derivabilă şi în $x = 0$ (cu $g'(0) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{6}}$) deci pe $\mathbb{R}$.

Soluţie 2.7 *i)* Avem

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \Big(x - \frac{x^3}{6} - \sin x\Big) = \lim_{x\to\infty} x^3\Big(-\frac{1}{6} + \frac{1}{x^2} - \frac{\sin x}{x^3}\Big) = -\infty.$$

ii) Funcţia f este de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}$ (chiar indefint derivabilă) şi $f',\, f'' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \cos x,$$

iar
$$f''(x) = -x + \sin x.$$

iii) Conform exerciţiului anterior, avem că f'' este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$. Atunci
$$f''(x) > f''(0) = 0,$$
pentru orice $x < 0$, iar
$$f''(x) < f''(0) = 0,$$
pentru orice $x > 0$.

Aceasta arată că $x = 0$ este punct de maxim global pentru f' şi deci $f'(x) \le f'(0) = 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ (şi nulă numai în $x = 0$). rezultă că f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$ şi deci
$$f(x) > f(0) = 0,$$
pentru orice $x < 0$, iar
$$f(x) < f(0) = 0,$$
pentru orice $x > 0$.

În particular, vom avea că $f(x) \le 0$, pentru orice $x \ge 0$. De asemenea, monotonia strictă arată că f este şi injectivă şi deci $x = 0$ este unica soluţie a ecuaţiei $f(x) = 0$.

Soluţie 2.8 *i)* Notând $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - ax - 1$, vom avea că
$$e^x \ge ax + 1, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}$$
este echivalentă cu
$$f(x) \ge 0 = f(0), \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$
Aceasta arată că pentru funcţia f, $x = 0$ este punct de minim (chiar global) din interiorul domeniului de definiţie. Dar funcţia f este derivabilă în $x = 0$, şi deci , conform Teoremei lui Fermat, rezultă că $f'(0) = 0$. Cum $f'(x) = e^x - a$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, obţinem că $f'(0) = 1 - a$ ceea ce arată că $a = 1$.

Pentru $a = 1$, se arată , folosind tabelul de variaţia al funcţiei f (de exemplu) că $e^x \ge x + 1$, penru orice $x \in \mathbb{R}$. Deci putem afirma că
$$e^x \ge ax + 1, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}, \textit{ dacă şi numai dacă } a = 1.$$

ii) Analog ca mai sus, considerând funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x + 2^x - 3^x - 4^x$, se arată inegalitatea este adevărată dacă şi numai dacă $a = 6$.

Soluţie 2.9 *i)* Funcţia f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ cu
$$f'(x) = 1 - e^{-x}.$$
Singurul său punct critic este $x = 0$, iar $f'(x) < 0$, pentru orice $x < 0$ şi $f'(x) > 0$, pentru orice $x > 0$. Obţinem astfel că f este strict crescătoare pe $[0, \infty)$.

ii) Din cele de mai sus, rezultă că $x = 0$ este unicul punct de extrem (minim global) al funcţiei f.

iii) Considerăm funcţia derivablă $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - m$. Avem că $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$, $g(0) = 1 - m$, iar $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = +\infty$. Şirul lui Rolle asociat acestei funcţii este

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$1-m$	$+\infty$

Dacă $m < 1$ atunci nu avem nici o alternanţă de semn şi deci g nu are nici o rădăcină reală (sau echivalent, ecuaţia $f(x) = m$ nu are nici o soluţie reală)

Dacă $m < 1$ atunci avem două alternanţe de semn $(+, -, +)$ şi deci funcţia g are două rădăcini (i.e. ecuaţia $f(x) = m$ are două soluţii), una în intervalul $(-\infty, 0)$, iar cealaltă din intervalul $(0, \infty)$.

Dacă $m = 1$, funcţia g are o unică rădăcină (şi deci ecuaţia $f(x) = m$ are o unică soluţie) şi anume $x = 0$.

Soluţie 2.10 *i)* Deoarece

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=\begin{cases}\dfrac{2e^{-x}-x-2}{2x(x+2)} & , \quad x\in(-2,\,0)\\[2mm] \dfrac{2e^{x}-x-2}{2x(x+2)} & , \quad x>0\end{cases}$$

obţinem

$$\lim_{x\nearrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\nearrow 0}\left(\frac{e^{-x}-1}{-x}\,\frac{-1}{x+2}-\frac{1}{2(x+2)}\right)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=-\frac{3}{4},$$

iar

$$\lim_{x\searrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\searrow 0}\left(\frac{e^{x}-1}{x}\,\frac{1}{x+2}-\frac{1}{2(x+2)}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\neq-\frac{3}{4}.$$

Rezultă că funcţia f nu este derivabilă în punctul $x=0$.

ii) Funcţia f este continuă în $x=0$, nederivabilă în acest punct şi

$$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{e^{-x}(x+3)}{(x+2)^2} & , \quad x<0, x\neq -2\\[2mm] \dfrac{e^{x}(x+1)}{(x+2)^2} & , \quad x>0\end{cases}$$

Tabelul de variaţie al funcţiei f este:

x	$-\infty$		-3		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+++$	0	$---$	|	$---$	|	$+++$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-e^3$	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Rezultă că $x=-3$ este punct de maxim local, iar $x=0$ este punct de minim local pentru funcţia f (cu toate că aceasta nu este derivabilă în acest punct, deci $x=0$ nu este punct critic al ei).

iii) Considerăm funcţia

$$g:\mathbb{R}\setminus\{-2\}\to\mathbb{R},\; g(x)=f(x)-m,$$

funcţie continuă pe $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ şi derivabilă pe $\mathbb{R}^*\setminus\{-2\}$. Cu ajutorul şirului lui Rolle, vom determina numărul soluţiilor ecuaţiei

$$g(x)=0$$

separat pe intervalele $(-\infty,\,-2)$ şi, respectiv, $(-2,\,+\infty)$.

Şirul lui Rolle este

x	$-\infty$	-3	-2	0	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$-e^3-m$	$-\infty$ | $+\infty$	$\frac{1}{2}-m$	$+\infty$

Dacă $m\in\Big(-\infty,\,-e^3\Big)$ atunci termenii şirului lui Rolle au, pe intervalul $(-\infty,\,-2)$ semnele $-,+,-$, deci g are două rădăcini în acest interval, iar pe intervalul $(-2,\,\infty)$ nu avem nici o alternanţă de semn, deci g nu are rădăcini în acest interval. Rezultă că ecuaţia $f(x)=m$ are exact două soluţii.

Dacă $m=-e^3$, atunci $x=-3$ este unica soluţie din intervalul $(-\infty,\,-2)$ şi nu avem nici o soluţie în intervalul $(-2,\,+\infty)$.

Dacă $m\in\left(-e^3,\,\dfrac{1}{2}\right)$, ecuaţia $f(x)=m$ nu are nici o soluţie, nici în intervalul $(-\infty,\,-2)$, nici în $(-2,\,\infty)$.

Dacă $m=\dfrac{1}{2}$, ecuaţia dată nu are soluţii în intervalul $(-\infty,\,-2)$, dar are o unică soluţie ($x=0$) în intervalul $(-2,\,+\infty)$.

Dacă $m\in\left(\dfrac{1}{2},\,+\infty\right)$, atunci ecuaţia dată nu are soluţii în intervalul $(-\infty,\,-2)$, dar are două soluţii în intervalul $(-2,\,+\infty)$.

Soluţie 2.11 *i)* Funcţia f este chiar indefinit derivabilă (ca şi produs de funcţii indefinit derivabile), $f(0) = 0$, iar

$$f'(x) = e^x(\sin x + \cos x),\ x \in \mathbb{R}$$

şi deci $f'(0) = 1$. Rezultă că $f \in M$.

ii) Fie $f \in M$, cu $f(x) \neq 0$, pentru orice $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$. Continuitatea funcţiei f arată că $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$, iar derivabilitatea sa în $x = 0$, arată că există

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 1.$$

Atunci

$$\lim_{x\to 0} \big(1 + f(x)\big)^{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \left(\big(1 + f(x)\big)^{\dfrac{1}{f(x)}} \right)^{\frac{f(x)}{x}} = e^{f'(0)} = e.$$

iii) Fie $f \in M$ şi $n \in \mathbb{N}^*$ fixate (pentru $n = 0$ afirmaţia este imediată). Avem

$$\frac{f^n(x) - x^n}{x^{n+1}} = \frac{f(x) - x}{x^2} \left(\Big(\frac{f(x)}{x}\Big)^{n-1} + \Big(\frac{f(x)}{x}\Big)^{n-2} + \ldots + \frac{f(x)}{x} + 1 \right).$$

Dar

$$\lim_{x\to 0} \left(\Big(\frac{f(x)}{x}\Big)^{n-1} + \Big(\frac{f(x)}{x}\Big)^{n-2} + \ldots + \frac{f(x)}{x} + 1 \right) = n,$$

iar

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - 1}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \frac{1}{2} f''(0).$$

Atunci

$$\lim_{x\to 0} \frac{f^n(x) - x^n}{x^{n+1}} = \frac{1}{2} f''(0) n = \frac{n f''(0)}{2}.$$

Soluţie 2.12 *i)* După calculul primelor două, trei derivate ale funcţiei f, intuim că

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n a^n n!}{(ax + b)^{n+1}},\ x \in \mathbb{R} \setminus \Big\{ -\frac{b}{a} \Big\},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Să demonstrăm această egalitate prin inducţie după $n \in \mathbb{N}$.

Pentru $n = 0$ afirmaţia este imediată (convenţional $f^{(0)} = f$).

Fie $k \in \mathbb{N}$, pentru care să presupunem, ca ipoteză de inducţie că

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k a^k k!}{(ax + b)^{k+1}},\ x \in \mathbb{R} \setminus \Big\{ -\frac{b}{a} \Big\}.$$

Atunci

$$f^{(k+1)}(x) = \Big(f^{(k)}\Big)'(x) = (-1)^k a^k k! \frac{-(k+1)}{(ax + b)^{k+2}} a = \frac{(-1)^{k+1} a^{k+1} (k+1)!}{(ax + b)^{k+2}},\ x \in \mathbb{R} \setminus \Big\{ -\frac{b}{a} \Big\}.$$

Afirmaţia este adevărată şi pentru $k + 1$, şi deci, conform principiului inducţiei matematice, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

ii) Avem că $f'(x) = \dfrac{2}{2x + 1}$, $x > 0$, iar, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, conform punctului anterior, avem:

$$f^{(n)}(x) = 2 \Big(\frac{1}{2x + 1} \Big)^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1} 2^n (n - 1)!}{(2x + 1)^n},$$

pentru orice $x > 0$.

iii) Avem că
$$f(x) = \frac{1}{5}\Big(\frac{1}{x-2} - \frac{2}{2x+1}\Big),\ x \in \mathbb{R} \setminus \Big\{-\frac{1}{2}, 2\Big\}.$$
Conform reguli de derivare a sumei a două funcţii şi rezultatului de la punctul (i), obţinem:
$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{5}\left(\Big(\frac{1}{x-2}\Big)^{(n)} - 2\Big(\frac{1}{2x+1}\Big)^{(n)}\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{(-1)^n n!}{(x-2)^n} - \frac{(-1)^n 2^{n+1} n!}{(2x+1)^{n+1}}\right),$$
pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \Big\{-\frac{1}{2}, 2\Big\}$.

iv) Fie $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + x + 2$, iar $h(x) = e^{-2x}$. Funcţiile g, h sunt indefinit derivabile cu $h^{(k)}(x) = (-2)^k e^{-2x}$, $x \in \mathbb{R}$, $(k \in \mathbb{N})$, iar $g^{(k)} = 0$, pentru $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$. Conform formulei derivatei de ordinul n a produsului a două funcţii vom avea:
$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \Big(gh\Big)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{C}_n^k g^{(k)}(x) h^{(n-k)}(x) = \\ &= g(x)h^{(n)}(x) + ng'(x)h^{(n-1)}(x) + \frac{n(n-1)}{2} g''(x)h^{(n-1)}(x) = \\ &= (x^2+x+1)(-2)^n e^{-2x} + n(2x+1)(-2)^{n-1}e^{-2x} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 \cdot (-2)^{n-2}e^{-2x} = \\ &= (-2)^{n-2}e^{-2x}\big(4x^2 - 4(n-1)x + n^2 - 3n + 4\big), \end{aligned}$$
Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi $n \in \mathbb{N}$ (se constată că formula este adevărată şi pentru $n = 0$ sau $n = 1$).

Capitolul 3

Primitivabilitate

3.1 Scurt breviar teoretic

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval, iar $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie.

Definiţia 3.1.1 *Spunem că funcţia f este primitivabilă pe I dacă există o funcţie* derivabilă $F : I \to \mathbb{R}$ *astfel încât $F'(x) = f(x)$, pentru orice $x \in I$.*

Remarca 3.1.1 1. Orice funcţie F ce verifică condiţiile din definiţia anterioară se numeşte *primitivă a funcţiei f.*

2. Dacă $F_1, F_2 : I \to \mathbb{R}$ sunt două primitive ale funcţie primitivabile f, atunci există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $F_2 = F_1 + c$ (orice două primitive ale unei funcţii primitivabile pe un interval diferă printr-o constantă).

3. Dacă $x_0 \in I$, $a \in \mathbb{R}$, iar $f : I \to \mathbb{R}$ este primitivabilă atunci există **o unică** primitivă, F, a funcţiei f cu proprietatea că $F(x_0) = a$.

4. Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este primitivabilă, $F_0 : I \to \mathbb{R}$ este o primitivă a sa, notând cu $\mathcal{C}$ clasa funcţiilor constante definite pe I, avem că

$$\{F : I \to \mathbb{R} \,:\, F- \text{ derivabilă, cu } F' = I\} =: \int f(x)\,dx = F_0 + \mathcal{C}.$$

Mulţimea tuturor primitivelor funcţiei primitivabile f, notată $\int f(x)\,dx$, se mai numeşte şi *integrala nedefinită a funcţie f.*

Pentru stabilirea primitivabilităţii unei funcţii sunt utile următoarele proprietăţi:

Propoziţia 3.1.1 a) *Orice funcţie continuă pe un interval este primitivabilă pe acel interval.*

b) *Orice funcţie primitivabilă pe un interval are proprietatea lui Darboux pe ecel interval.*

c) *Dacă o funcţie este primitivabilă pe un interval, aceasta nu are discontinuităţi de speţa I-a în acel interval.*

d) *Dacă într-un punct al intervalului de definiţie funcţia are cel puţin una din limitele laterale infinită, atunci aceasta nu este primitivabilă.*

Calcularea mulţimii primitivelor unei funcţii primitivabile se face pe baza unor ”reguli”, a unor formule de calcul şi a unei liste de primitive remarcabile.

Reguli de calcul:

- Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este primitivabilă, iar $a \in \mathbb{R}^*$ atunci $a \cdot f$ este primitivabilă şi
$$\int a \cdot f(x)\,dx = a \cdot \int f(x)\,dx.$$
- Dacă $f, g : I \to \mathbb{R}$ sunt primitivabile atunci $f + g$ este primitivabilă şi
$$\int \big(f(x) + g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$$

Formule de calcul:

- (Formula de integrare prin părţi) Dacă $f, g : I \to \mathbb{R}$ suntdouă funcţii derivabile atunci $f' \cdot g$ este primitivabilă dacă şi numai dacă $f \cdot g^prime$ este primitivabilă şi are loc
$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) = \int f(x) \cdot g'(x)\,dx.$$
- (Prima formulă de schimbare de variabilă) Fie $u : I \to J$ o funcţie derivabilă, iar $f : J \to \mathbb{R}$ o altă funcţie. Atunci $f \circ u \cdot u'$ este primitivabilă pe I dacă şi numai dacă f este primitivabilă pe J şi avem că:
$$\int f(u(x)) \cdot u'(x)\,dx = F(u(x)) + \mathcal{C},$$
unde $F : J \to \mathbb{R}$ este o primitivă a funcţie f.

Integrale remarcabile:

- $\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \mathcal{C}$, $x \in \mathbb{R}$, unde $n \in \mathbb{N}$;
- $\displaystyle\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \mathcal{C}$, $x \in \mathbb{R}^*_+$, unde $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ (în particular $\displaystyle\int \sqrt{x}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \mathcal{C}$, $x \in \mathbb{R}^*_+$);
- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + \mathcal{C}$, $x \in I \subset \mathbb{R}^*$;
- $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + \mathcal{C}$, $x \in \mathbb{R}$, unde $a > 0$ (în particular $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + \mathcal{C}$);
- $\displaystyle\int \sin ax\,dx = -\frac{\cos ax}{a} + \mathcal{C}$, $x \in \mathbb{R}$, unde $a \in \mathbb{R}^*$;
- $\displaystyle\int \cos ax\,dx = \frac{\sin ax}{a} + \mathcal{C}$, $x \in \mathbb{R}$, unde $a \in \mathbb{R}^*$;
- $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 - a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + \mathcal{C}$, $x \in I \subset \mathbb{R} \setminus \{\pm a\}$, unde $a \in \mathbb{R}^*$;
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}\,dx = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + \mathcal{C}$, $x \in I \subset \mathbb{R} \setminus (-a,\, a)$, unde $a \in \mathbb{R}^*_+$;
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a} + \mathcal{C}$, $x \in (-a,\, a)$, unde $a \in \mathbb{R}^*_+$;
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}\,dx = \ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}| + \mathcal{C}$, $x \in \mathbb{R}$, unde $a \in \mathbb{R}^*$.

3.2 Probleme propuse

Exercițiul 3.1 Să se studieze primitivabilitatea următoarelor funcții $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$:

i) $f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^{n-1}} \cos \dfrac{\alpha}{x^n} & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$, unde $\alpha \in \mathbb{R}^*$;

ii) $f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^{n-1}} \sin \dfrac{\alpha}{x^n} & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$;

iii) $f_n(x) = \begin{cases} \sin^n \dfrac{1}{x} & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$;

iv) $f_n(x) = \begin{cases} \cos^n \dfrac{1}{x} & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$.

Exercițiul 3.2 Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ să fie primitivabilă:

i) $f(x) = \begin{cases} a & , \ x \leq 0 \\ x^{\,1/x} & , \ x > 0 \end{cases}$;

ii) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & , \ x \neq 0 \\ a & , \ x = 0 \end{cases}$;

iii) $f(x) = \begin{cases} a & , \ x \leq 0 \\ \sin \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x} \cos x & , \ x > 0 \end{cases}$;

iv) $f(x) = \begin{cases} \cos^2 \dfrac{1}{x} & , \ x \neq 0 \\ a & , \ x = 0 \end{cases}$;

v) $f(x) = \begin{cases} \cos \dfrac{1}{x^2} & , \ x \neq 0 \\ a & , \ x = 0 \end{cases}$.

Exercițiul 3.3 Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție continuă. Să se arate că:

i) Funcția $g_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_\alpha(x) = \begin{cases} f(x) \sin \dfrac{\alpha}{x} & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$, este primitivabilă, unde $\alpha \in \mathbb{R}$.

ii) Funcția $g_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_\alpha(x) = \begin{cases} f(x) \cos \dfrac{\alpha}{x} & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$, este primitivabilă, unde $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

În particular să se arate că următoarele funcții sunt primitivabile:

j) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} e^x\sin\dfrac{1}{x} & ,\quad x\neq 0\\ 0 & ,\quad x=0\end{cases}$;

jj) $f_\alpha:[0,\ \infty)\to\mathbb{R},\ f_\alpha(x)=\begin{cases} \ln x\sin\dfrac{1}{x} & ,\quad x>0\\ \alpha & ,\quad x=0\end{cases}$, unde $\alpha\in\mathbb{R}$;

jjj) $f_\alpha:[0,\ \infty)\to\mathbb{R},\ f_\alpha(x)=\begin{cases} \ln x\cos\dfrac{1}{x} & ,\quad x>0\\ \alpha & ,\quad x=0\end{cases}$, unde $\alpha\in\mathbb{R}$.

Exerciţiul 3.4 Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă pe $\mathbb{R}$ şi derivabilă în $x=0$. Dacă $f(0)\neq 0$ să se arate că funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$g(x)=\begin{cases} \sin\dfrac{f(x)}{x} & ,\quad x\neq 0\\ 0 & ,\quad x=0\end{cases},$$

este primitivabilă pe $\mathbb{R}$.

În particular deduceţi că următaorele funcţii sunt primitivabile:

i) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} \sin\dfrac{1}{\arctan x} & ,\quad x\neq 0\\ 0 & ,\quad x=0\end{cases}$;

ii) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} \cos\dfrac{1}{\arctan x} & ,\quad x\neq 0\\ 0 & ,\quad x=0\end{cases}$;

iii) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} \sin\dfrac{1}{e^x-1} & ,\quad x\neq 0\\ 0 & ,\quad x=0\end{cases}$;

iv) $f:[-1,\ 1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} \sin\dfrac{1}{\arcsin x} & ,\quad x\neq 0\\ 0 & ,\quad x=0\end{cases}$

Exerciţiul 3.5 Pe domeniile indicate, calculaţi:

i) $\displaystyle\int (x+3)^{10}\,dx,\ x\in\mathbb{R};$

ii) $\displaystyle\int x(x+3)^{10}\,dx,\ x\in\mathbb{R};$

iii) $\displaystyle\int x^2(x+3)^{10}\,dx,\ x\in\mathbb{R};$

iv) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+9}\,dx,\ x\in\mathbb{R};$

v) $\displaystyle\int \frac{x-2}{x^2+16}\,dx,\ x\in\mathbb{R};$

vi) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^6+4}\,dx,\ x\in\mathbb{R};$

vii) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^6-3}\,dx,\ x\geq 2;$

viii) $\displaystyle\int \frac{5x-2}{x^2+4}\,dx,\ x\in\mathbb{R};$

ix) $\displaystyle\int \frac{4x+2}{x^2+x+1}\,dx,\ x\in\mathbb{R};$

x) $\displaystyle\int \left(\frac{3}{x^2+3}+\frac{6}{x^2-3}\right)dx,\ x>\sqrt{3};$

xi) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx,\ x\in\mathbb{R};$

xii) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+6x+13}\,dx,\ x\in\mathbb{R};$

xiii) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-2x+5}\,dx,\ x\in\mathbb{R};$

xiv) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+x+1}\,dx,\ x\in\mathbb{R};$

xv) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+2x+10}\,dx,\ x\in\mathbb{R};$

xvi) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^2+2}\,dx,\ x\in\mathbb{R};$

xvii) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^3+1}\,dx,\ x>-1;$

xviii) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2+2}\,dx,\ x\in\mathbb{R};$

xix) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}-2e^x}{e^{2x}+1}\,dx,\ x\in\mathbb{R};$

xx) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^x-1}\,dx,\ x>0;$

xxi) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx,\ x\in\mathbb{R};$

xxii) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\,dx,\ x>1;$

xxiii) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x(1-\ln^2 x)}\,dx,\ x>e;$

xxiv) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{3-\ln^2 x}}\,dx,\ x\in(1,\ e);$

xxv) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln(2x)}\,dx,\ x>\frac{1}{2};$

xxvi) $\displaystyle\int \frac{1}{x(\ln^2 x-2)}\,dx,\ x>e^2;$

xxvii) $\displaystyle\int \frac{1}{x(\ln^2 x+5)}\,dx,\ x>0;$

xxviii) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{\ln^2 x+1}}\,dx,\ x>0;$

xxix) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{4-\ln^2 x}}\,dx,\ x\in(e^{-2},\ e^2);$

xxx) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos^2 x-4}\,dx,\ x\in\mathbb{R};$

xxxi) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^2 x+2}}\,dx,\ x\in\mathbb{R};$

xxxii) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{4-\sin^2 x}}\,dx,\ x\in\mathbb{R};$

xxxiii) $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{4-\sin^2 x}}\,dx,\ x\in\mathbb{R};$

xxxiv) $\displaystyle\int \frac{\tan^4 x+\tan^2 x}{1+\tan^3 x}\,dx,\ x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right);$

Exercițiul 3.6 Să se calculeze:

i) $\displaystyle\int \frac{x^4+1}{x^6+1}dx,\ x\in\mathbb{R};$

ii) $\displaystyle\int \arctan\frac{1}{x}dx,\ x>0;$

iii) $\displaystyle\int e^{\arcsin x}dx,\ x\in[-1,\ 1];$

iv) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}dx,\ x\in(0,\ \pi);$

v) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}dx,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right);$

vi) $\displaystyle\int \frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{(1+x^2)^3}}dx,\ x\in\mathbb{R};$

vii) $\displaystyle\int \frac{x^4\arctan x}{1+x^2}dx,\ x\in\mathbb{R};$

viii) $\displaystyle\int e^x\cos^n x dx,\ x\in\mathbb{R};$

ix) $\displaystyle\int e^x\sin^n x dx,\ x\in\mathbb{R};$

x) $\displaystyle\int \frac{1}{x^4+1}dx,\ x\in\mathbb{R}.$

xi) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x\cos x-\sin x)^2}dx,\ x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right);$

xii) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}dx,\ x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right).$

xiii) $\displaystyle\int \frac{x^7}{(1-x^2)^3}dx,\ x\in(-1,\ 1);$

xiv) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x+e^x}dx,\ x\geq 0;$

xv) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{e^x+\sin x+\cos x}dx,\ x>0;$

xvi) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+x^5}dx,\ x>0;$

xvii) $\displaystyle\int \sqrt{|x^2-1|}dx,\ x\in\mathbb{R};$

xviii) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}dx,\ x>\frac{1}{e};$

xix) $\displaystyle\int \frac{1}{x(1+x^4)}dx,\ x>0;$

xx) $\displaystyle\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx,\ x\in\mathbb{R};$

xxi) $\displaystyle\int \sin(\ln x)dx,\ x>0;$

xxii) $\displaystyle\int \sqrt{1+\cos x}dx,\ x\in[0,\ 2\pi].$

xxiii) $\displaystyle\int \frac{x+\sin x-\cos x-1}{x+e^x+\sin x}\,dx,\ x \geq 0;$

xxiv) $\displaystyle\int \cos^2\sqrt{x}\,dx,\ x \geq 0;$

xxv) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}\,dx,\ x \geq 0;$

xxvi) $\displaystyle\int x \arcsin\frac{1}{x}\,dx,\ x > 1;$

xxvii) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx,\ x > 0;$

xxviii) $\displaystyle\int \tan 2x\ \tan 3x\ \tan 5x\,dx,\ x \in \left(-\frac{\pi}{10},\ \frac{\pi}{10}\right);$

xxix) $\displaystyle\int \frac{3\sin x+4\cos x}{5\sin x+6\cos x}\,dx,\ x \in \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right];$

xxx) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^5 x\cos^5 x}\,dx,\ x \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right);$

xxxi) $\displaystyle\int \frac{\arcsin(e^x)}{e^x}\,dx,\ x \leq 0.$

3.3 Soluţii - Primitivabilitate

Soluţie 3.1 *i)* Fie $F_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F_n(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{\alpha}{x^n} & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$. Funcţia F_n este derivabilă pe $\mathbb{R}$ (derivabilitatea în $x_0 = 0$ şi calculul derivatei în acest punct se face cu definiţia) şi

$$F_n'(x) = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{\alpha}{x^n} - \dfrac{n\alpha}{x^{n-1}} \cos \dfrac{\alpha}{x^n} & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases} = g_n(x) - \alpha n f_n(x),$$

unde $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_n(x) = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x^n} & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$, este o funcţie continuă pe $\mathbb{R}$, deci primitivabilă. Cum $f_n = \dfrac{1}{\alpha n}(g_n - F_n')$, rezultă că f_n este primitivabilă pe $\mathbb{R}$.

ii) Se procedează analog plecând de la funcţia $F_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$F_n(x) = \begin{cases} x^2 \cos \dfrac{\alpha}{x^n} & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}.$$

iii) Fie $F_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F_n(x) = \begin{cases} x^2 \sin^n \dfrac{1}{x} \cos \dfrac{1}{x} & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$. Funcţia F_n este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi

$$\begin{aligned} F_n'(x) &= g(x) - n \begin{cases} \sin^{n-1} \dfrac{1}{x} \cos^2 \dfrac{1}{x} & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases} + f_{n+1}(x) = \\ &= g(x) - n f_{n-1}(x) + (n+1) f_{n+1}(x), \end{aligned}$$

unde $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_n(x) = \begin{cases} 2x \sin^n \dfrac{1}{x} \cos \dfrac{1}{x} & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$, este o funcţie continuă pe $\mathbb{R}$ şi deci primitivabilă. Obţinem astfel că

$$F_n' = g - n f_{n-1} + (n+1) f_{n+1}, \tag{3.1}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Vom arăta că funcţia f_n este primitivabilă dacă şi numai dacă n este impar.

Necesitatea. Presupune prin absurd că există $n = 2k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât f_{2k} este primitivabilă. Din relaţia 3.1 rezultă că f_{2k-2} este şi ea primitivabilă şi deci

$$f_2(x) = \begin{cases} \sin^2 \dfrac{1}{x} & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases} - \frac{1}{2} \begin{cases} \cos \dfrac{2}{x} & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases},$$

este primitivabilă, ceea ce implică faptul că funcţia $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$$

are primitive. *Contradicţie*, deoarece funcţia u nu are proprietatea lui Darboux.

Suficienţa. Din *i)* deducem că f_1 are primitive. Dacă $n \in \mathbb{N}^*$ astfel înât f_{2n-1} este primitivabilă, atunci relaţia (3.1) implică faptul că f_{2n+1} este şi ea primitivabilă. Conform principiului inducţie matematice, rezultă că f_{2n+1} este primtivabilă, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

iv) Analog ca la punctul anterior

Soluţie 3.2 *i)* Deoarece $f(0-0)=a$ şi $f(0+0)=0$ vom avea:

- dacă $a=0$ atunci funcţia f este continuă, deci primitivabilă.

- dacă $a\neq 0$ atunci $x=0$ este punct de discontinuitate de prima speţă şi deci funcţia f nu are proprietatea lui Darboux

ii) Analog ca mai sus se obţine că funcţia f este primitivabilă dacă şi numai dacă $a=1$.

iii) Deoarece $f(0+0)=+\infty$ rezultă că funcţia f nu are proprietatea lui Darboux, pentru orice $a\in\mathbb{R}$ şi deci nu este primitivabilă, pentru orice $a\in\mathbb{R}$.

iv)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & , \quad x\neq 0\\ a & , \quad x=0\end{cases}+\frac{1}{2}\begin{cases}\cos\dfrac{2}{x} & , \quad x\neq 0\\ 0 & , \quad x=0\end{cases}.$$

Rezultă că funcţia f este primitivabilă dacă şi numai dacă $a=\dfrac{1}{2}$.

v) Fie $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\begin{cases}x^3\sin\dfrac{1}{x^2} & , \quad x\neq 0\\ 0 & , \quad x=0\end{cases}$. Avem că funcţia F este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi

$$F'(x)=\begin{cases}3x^2\sin\dfrac{1}{x^2} & , \quad x\neq 0\\ 0 & , \quad x=0\end{cases}+2\begin{cases}\cos\dfrac{1}{x^2} & , \quad x\neq 0\\ 0 & , \quad x=0\end{cases}.$$

Aceasta arată că funcţia f este primitivabilă dacă şi numai dacă $a=0$.

Soluţie 3.3 *i)* Deoarece

$$g_\alpha(x)=\begin{cases}(f(x)-f(0))\cos\dfrac{\alpha}{x} & , \quad x\neq 0\\ 0 & , \quad x=0\end{cases}+f(0)\begin{cases}\cos\dfrac{\alpha}{x} & , \quad x\neq 0\\ 0 & , \quad x=0\end{cases},$$

rezultă că funcţia g_α este primitivabilă ca suma dintre o funcţie continuă (deci primitivabilă) şi una primitivabilă.

ii) Analog cu punctul anterior.

j) Imediat din problema anterioară pentru $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=e^x$.

jj) Fie $F_0:[0,\ \infty)\to\mathbb{R}$,

$$F_0(x)=\begin{cases}x^2\ln x\cos\dfrac{1}{x} & , \quad x>0\\ 0 & , \quad x=0\end{cases}.$$

Funcţia F_0 este derivabilă pe $[0,\ \infty)$ şi

$$\begin{aligned}F_0(x) \quad &= \quad \begin{cases}2x\ln x\cos\dfrac{1}{x} & , \quad x>0\\ 0 & , \quad x=0\end{cases}+\begin{cases}x\cos\dfrac{1}{x} & , \quad x>0\\ 0 & , \quad x=0\end{cases}+\\ &\quad +\begin{cases}\ln x\sin\dfrac{1}{x} & , \quad x>0\\ 0 & , \quad x=0\end{cases}.\end{aligned}$$

Rezultă de aici că funcţia f_0 este primitivabilă pe $[0,\ \infty)$. Cum

$$f_\alpha(x)=f_0(x)+\begin{cases}0 & , \quad x>0\\ \alpha & , \quad x=0\end{cases},$$

rezultă că funcţia f_α este primitivabilă dacă şi numai dacă $\alpha=0$.

jjj) Se procedează analog punctului anterior.

Soluţie 3.4 Avem că:

$$\begin{aligned} g(x) &= \begin{cases} \sin\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\cos\dfrac{f(0)}{x} & , \ x\neq 0 \\ 0 & , \ x=0 \end{cases} + \\ &+\begin{cases} \cos\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\sin\dfrac{f(0)}{x} & , \ x\neq 0 \\ 0 & , \ x=0 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} u(x)\cos\dfrac{f(0)}{x} & , \ x\neq 0 \\ 0 & , \ x=0 \end{cases} + \begin{cases} v(x)\sin\dfrac{f(0)}{x} & , \ x\neq 0 \\ 0 & , \ x=0 \end{cases} , \end{aligned}$$

unde $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$u(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{f(x)-f(0)}{x} & , \ x\neq 0 \\ \sin f'(0) & , \ x=0 \end{cases} , \ v(x) = \begin{cases} \cos\dfrac{f(x)-f(0)}{x} & , \ x\neq 0 \\ \cos f'(0) & , \ x=0 \end{cases}$$

sunt continue pe $\mathbb{R}$.

Rezultă că g este suma a două funcţii primitivabile, deci este primitivabilă.

Se aplică (după verificarea îndeplinirii tuturor condiţiilor) rezultatul de mai sus pentru:

i) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\arctan x} & , \ x\neq 0 \\ 1 & , \ x=0 \end{cases}$

iii) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x-1} & , \ x\neq 0 \\ 1 & , \ x=0 \end{cases}$

iv) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\arcsin x} & , \ x\neq 0 \\ 1 & , \ x=0 \end{cases}$

Soluţie 3.5 *i)* $\displaystyle\int (x+3)^{10}\,dx = \frac{(x+3)^{11}}{11} + \mathcal{C}, \quad x \in \mathbb{R}$

ii) $\displaystyle\int x(x+3)^{10}\,dx = \int \left((x+3)^{11} - 3(x+3)^{10}\right)dx = \frac{(x+3)^{12}}{12} - 3\frac{(x+3)^{11}}{11} + \mathcal{C}, \quad x \in \mathbb{R}.$

iii)

$$\begin{aligned} \int x^2(x+3)^{10}\,dx &= \int \left((x+3)^2 - 6(x+3) + 9\right)(x+3)^{10}\,dx = \\ &= \int (x+3)^{12}\,dx - 6\int (x+3)^{11}\,dx + 9\int (x+3)^{10}\,dx = \\ &= \frac{(x+3)^{13}}{13} - \frac{(x+3)^{12}}{2} + \frac{9(x+3)^{11}}{11} + \mathcal{C}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

iv) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+9}\,dx = \frac{1}{2}\frac{(x^2+9)'}{x^2+9}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+9) + \mathcal{C}, \quad x \in \mathbb{R}$

v) $\displaystyle\int \frac{x-2}{x^2+16}\,dx = \frac{1}{2}\frac{(x^2+16)'}{x^2+16}\,dx - 2\int \frac{1}{x^2+16}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+16) - \operatorname{arctg}\frac{x}{4} + \mathcal{C}, \quad x \in \mathbb{R}$

vi) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^6+4}\,dx = \frac{1}{3}\frac{(x^3)'}{(x^3)^2+4}\,dx = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x^3}{2} + \mathcal{C}, \quad x \in \mathbb{R}$

vii) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^6-3}\,dx = \frac{1}{3}\frac{(x^3)')}{(x^3)^2-3}\,dx = \frac{1}{6\sqrt{3}}\frac{x^3-\sqrt{3}}{x^3+\sqrt{3}} + \mathcal{C}, \quad x > 2$

viii) $\displaystyle\int \frac{5x-2}{x^2+4}\,dx = \frac{5}{2}\frac{(x^2+4)')}{x^2+4}\,dx - 2\int \frac{1}{x^2+4}\,dx = \frac{5}{2}\ln(x^2+4) - \operatorname{arctg}\frac{x}{2} + \mathcal{C}, \quad x \in \mathbb{R}$

ix) $\displaystyle\int \frac{4x+2}{x^2+x+1}\,dx = 2\frac{(x^2+x+1)')}{x^2+x+1}\,dx = 2\ln(x^2+x+1) + \mathcal{C}, \quad x \in \mathbb{R}$

x) $\displaystyle\int \left(\frac{3}{x^2+3} + \frac{6}{x^2-3}\right)dx = 3\int \frac{1}{x^2+3} + 6\int \frac{1}{x^2-3}\,dx = \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}\ln\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}} + \mathcal{C}, \quad x \in \mathbb{R}$

xi) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx = \int 1\,dx + \int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = x - \operatorname{arctg} x + \mathcal{C}, \quad x \in \mathbb{R}$

xii) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+6x+13}\,dx = \int \frac{(x+3)'}{(x+3)^2+4}\,dx = \operatorname{arctg}\frac{x+3}{2} + \mathcal{C}, \quad x \in \mathbb{R}$

xiii) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-2x+5}\,dx = \int \frac{(x-1)'}{(x-1)^2+4}\,dx = \operatorname{arctg}\frac{x-1}{2} + \mathcal{C}, \quad x \in \mathbb{R}$

xiv)

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^2+x+1}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)'}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right) + \mathcal{C}, \quad x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

xv) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+2x+10}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+10}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+10) + \mathcal{C}, \quad x \in \mathbb{R}$

xvi)

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4}{x^2+2}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{x^4-4+4}{x^2+2}\,dx = \int (x^2-2)\,dx + 4\int \frac{1}{x^2+2}\,dx = \\ &= \frac{x^3}{3} - 2x + 2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + \mathcal{C}, \quad x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

xvii) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^3+1}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{(x^3+1)'}{x^3+1}\,dx = \frac{1}{3}\ln(x^3+1) + \mathcal{C}, \quad x > -1$

xviii) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2+2}\,dx = \int \frac{x^3+2x-2x}{x^2+2}\,dx = \int x\,dx - \int \frac{(x^2+2)'}{x^2+2}\,dx = \frac{x^2}{2} - \ln(x^2+2) + \mathcal{C}, \quad x \in \mathbb{R}$

xix)

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{2x}-2e^x}{e^{2x}+1}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{(e^{2x}+1)'}{e^{2x}+1}\,dx - 2\int \frac{1}{1+(e^x)^2}(e^x)'\,dx = \\ &= \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) - 2\operatorname{arctg} e^x + \mathcal{C}, \quad x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

xx)

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{2x}}{e^x-1}\,dx &= \int \frac{e^{2x}-e^x+e^x}{e^x-1}\,dx = \int e^x\,dx + \int \frac{(e^x-1)'}{e^x-1}\,dx = \\ &= e^x + \ln(e^x-1) + \mathcal{C}, \quad x > 0\end{aligned}$$

xxi)

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx &= \int \frac{e^{2x}+e^x-e^x}{e^x+1}\,dx = \int e^x\,dx - \int \frac{(e^x+1)'}{e^x+1}\,dx = \\ &= e^x - \ln(e^x+1) + \mathcal{C}, \quad x > 0\end{aligned}$$

xxii) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int \frac{(\ln x)'}{\ln x}\,dx = \ln(\ln x) + \mathcal{C}, \quad x > 1$

xxiii) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x(1-\ln^2 x)}\,dx = \int \frac{\ln x}{1-\ln^2 x}(\ln x)'\,dx.$

Cum $\displaystyle\int \frac{t}{1-t^2}\,dt = -\frac{1}{2}\int \frac{(t^2-1)'}{t^2-1}\,dt = -\frac{1}{2}\ln(t^2-1),\ t > 1$, conform primei formule de schimbare de variabilă, obţinem:

$$\int \frac{\ln x}{x(1-\ln^2 x)}\,dx = -\frac{1}{2}\ln(\ln^2 x - 1), x > e.$$

xxiv) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{3-\ln^2 x}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{3-\ln^2 x}}(\ln x)'\,dx = \arcsin\frac{\ln x}{\sqrt{3}},\ x \in (1,\ e).$

xxv) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln(2x)}\,dx = \int \frac{(\ln 2x)'}{\ln(2x)}\,dx = \ln(\ln 2x) + \mathcal{C},\ x > \frac{1}{2}.$

xxvi) $\displaystyle\int \frac{1}{x(\ln^2 x - 2)}\,dx = \int \frac{(\ln x)'}{\ln^2 x - 2}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\ln x - \sqrt{2}}{\ln x + \sqrt{2}},\ x > e^2$

xxvii) $\displaystyle\int \frac{1}{x(\ln^2 x + 5)}\,dx = \int \frac{(\ln x)'}{\ln^2 x + 5}\,dx = \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{\ln x}{\sqrt{5}},\ x > 0.$

xxviii) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{\ln^2 x + 1}}\,dx = \int \frac{(\ln x)'}{\sqrt{\ln^2 x + 1}}\,dx = \ln(\ln x + \sqrt{\ln^2 x + 1}) + \mathcal{C},\ x > 0.$

xxix) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{4-\ln^2 x}}\,dx = \int \frac{(\ln x)'}{\sqrt{4-\ln^2 x}}\,dx = \arcsin\frac{\ln x}{2} + \mathcal{C},\ x \in (e^{-2},\ e^2).$

xxx) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos^2 x - 4}\,dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos^2 x - 4}\,dx = -\frac{1}{4}\ln\frac{\cos x - 2}{\cos x + 2} + \mathcal{C},\ x \in \mathbb{R}.$

xxxi) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^2 x + 2}}\,dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\sqrt{\cos^2 x + 2}}\,dx = -\ln(\cos x + \sqrt{\cos^2 x + 2}) + \mathcal{C},\ x \in \mathbb{R}.$

xxxii) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{4-\sin^2 x}}\,dx = \int \frac{(\sin x)'}{\sqrt{4-\sin^2 x}}\,dx = \arcsin\frac{\sin x}{2} + \mathcal{C},\ x \in \mathbb{R}.$

xxxiii) $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{4-\sin^2 x}}\,dx = -\int \frac{(4-\sin^2 x)'}{\sqrt{4-\sin^2 x}}\,dx = -2\sqrt{4-\sin^2 x} + \mathcal{C},\ x \in \mathbb{R}.$

xxxiv) $\displaystyle\int \frac{\tan^4 x + \tan^2 x}{1+\tan^3 x}\,dx = \int \frac{\tan^2 x(\tan^2 x + 1)}{1+\tan^3 x}\,dx = \int \frac{\tan^2 x}{1+\tan^3 x}(\tan x)'\,dx.$

Cum $\displaystyle\int \frac{t^2}{1+t^3}\,dt = \frac{1}{3}\int \frac{(1+t^3)'}{1+t^3}\,dt = \frac{1}{3}\ln(1+t^3) + \mathcal{C},\ t > 0$, conform primei formule de schimbare de variabilă obţinem:

$$\int \frac{\tan^4 x + \tan^2 x}{1+\tan^3 x}\,dx = \frac{1}{3}\ln(1+\tan^3 x) + \mathcal{C}, x \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right).$$

Soluţie 3.6 *i)*

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4+1}{x^6+1}dx &= \int \frac{x^4-x^2+1}{x^6+1}dx + \frac{1}{3}\int \frac{(x^3)'}{1+(x^3)^2}dx = \\ &= \int \frac{1}{x^2+1}dx + \frac{1}{3}\arctan x^3 = \arctan x + \frac{1}{3}\arctan x^3 + \mathcal{C},\ x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

ii) Integrând prin părţi obţinem:

$$\int \arctan \frac{1}{x} dx = \int (x)' \arctan \frac{1}{x} dx = x \arctan \frac{1}{x} + \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \arctan \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \mathcal{C}.$$

iii) Pe intervalul $(-1, 1)$, integrând prin părţi obţinem:

$$\begin{aligned} \int e^{\arcsin x}\, dx &= \int x' e^{\arcsin x}\, dx = x e^{\arcsin x} - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} e^{\arcsin x}\, dx = \\ &= x' e^{\arcsin x} + \int \left(\sqrt{1-x^2}\right)' e^{\arcsin x}\, dx = x e^{\arcsin x} + \sqrt{1-x^2} e^{\arcsin x} - \int e^{\arcsin x}\, dx. \end{aligned}$$

Atunci

$$\int e^{\arcsin x}\, dx = \frac{1}{2}\Big(x + \sqrt{1-x^2}\Big) e^{\arcsin x} + \mathcal{C},\ x \in [-1, 1].$$

iv) Conform primei formule de schimbare de variabilă, avem:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin x} dx &= \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x} dx = -\int \frac{(\cos x)'}{1-\cos^2 x} dx = \\ &= -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + \mathcal{C} = -\frac{1}{2} \ln \frac{1-\cos x}{1+\cos x} + \mathcal{C},\ x \in \big(0, \pi\big). \end{aligned}$$

v) Analog ca ma sus, vom avea:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos x} dx &= \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x} dx = \int \frac{(\sin x)'}{1-\sin^2 x} dx = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} \right| + \mathcal{C} = \frac{1}{2} \ln \frac{1-\sin x}{1+\sin x} + \mathcal{C}, x \in \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big). \end{aligned}$$

vi) Integrând prin părţi, avem:

$$\begin{aligned} \int \frac{x e^{\arctan x}}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\, dx &= \int (e^{\arctan x})' \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = \frac{x e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{\sqrt{1+x^2} - x \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} e^{\arctan x}\, dx = \\ &= \frac{x e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{e^{\arctan x}}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\, dx = \frac{x e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int (e^{\arctan x})' \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = \\ &= \frac{x e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{x e^{\arctan x}}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\, dx \end{aligned}$$

Astfel

$$\int \frac{x e^{\arctan x}}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\, dx = \frac{x-1}{2\sqrt{1+x^2}} e^{\arctan x} + \mathcal{C},\ x \in \mathbb{R}.$$

vii) Integrând prin părţi obţinem

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^4 \arctan x}{1+x^2}dx &= \int \frac{(x^4-1+1)\arctan x}{1+x^2}dx = \int (x^2-1)\arctan x dx + \int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx = \\
&= \left(\frac{x^3}{3}-x\right)\arctan x - \int \frac{x^3-3x}{3(1+x^2)}dx + \frac{1}{2}\arctan^2 x = \\
&= \left(\frac{x^3}{3}-x\right)\arctan x + \frac{1}{2}\arctan^2 x + \frac{1}{6}x^2 - \\
&\quad -\frac{4}{3}\int \frac{x}{1+x^2}dx = \left(\frac{x^3}{3}-x\right)\arctan x + \\
&\quad +\frac{1}{2}\arctan^2 x + \frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{3}\ln(1+x^2) + \mathcal{C}.
\end{aligned}$$

viii) Notăm $I_n = \displaystyle\int e^x \cos^n x dx$. Integrând prin părţi obţinem

$$\begin{aligned}
I_n &= e^x \cos^n x + n\int e^x \cos^{n-1} x \sin x dx = e^x \cos^n x + \\
&\quad + ne^x \cos^{n-1} x \sin x + n(n-1)\int e^x \cos^{n-2} x \sin^2 x - n\int e^x \cos^n x = \\
&= e^x \cos^n x + ne^x \cos^{n-1} x \sin x + n(n-1)I_{n_2} - n^2 I_n.
\end{aligned}$$

Rezultă că

$$I_n = \frac{e^x}{n^2+1}\left(\cos^n x + n\cos^{n-1}\sin x\right) + \frac{n(n-1)}{n^2+1}I_{n-2},$$

pentru orice $n \geq 2$ cu

$$\begin{aligned}
I_0 &= e^x \\
I_1 &= \int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + \mathcal{C}.
\end{aligned}$$

ix) Analog ca ma sus

x) Pe orice interval ce nu-l conţine pe 0 avem:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^4+1}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{x^2-1}{x^4+1}dx = \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx = \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\left(x-\frac{1}{x}\right)'}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-2}dx - \frac{1}{2}\int \frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)'}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}dx = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \mathcal{C}.
\end{aligned}$$

O primitivă pe $\mathbb{R}$ a funcţiei f este de forma

$$F(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{cases} \arctan\dfrac{x^2-1}{\sqrt{2}x} & , \quad x<0 \\ \dfrac{\pi}{2} & , \quad x=0 \\ \pi + \arctan\dfrac{x^2-1}{\sqrt{2}x} & , \quad x>0 \end{cases} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \mathcal{C}.$$

xi)

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{(x\cos x-\sin x)^2}dx &= \int \frac{x}{\sin x}\,\frac{x\sin x}{(x\cos x-\sin x)^2}dx = \\
&= \int \frac{x}{\sin x}\left(\frac{1}{x\cos x-\sin x}\right)' dx \\
&= \frac{x}{\sin x(x\cos x-\sin x)} - \\
&- \int \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}\,\frac{1}{x\cos x-\sin x}dx = \\
&= \frac{x}{\sin x(x\cos x-\sin x)} + \int \frac{1}{\sin^2 x}dx = \\
&= \frac{x}{\sin x(x\cos x-\sin x)} - \operatorname{ctg} + \mathcal{C},\quad x\in\left(0,\, \frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

xii) Analog ca mai sus

xiii)

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^7}{(1-x^2)^3}dx &= \int x^6 \frac{x}{(1-x^2)^3} = \frac{1}{4}\frac{x^6}{(1-x^2)^2} - \int \frac{3}{2}\frac{x^5}{(1-x^2)^2}dx = \\
&= \frac{1}{4}\frac{x^6}{(1-x^2)^2} - \frac{3}{2}\left[x^4\frac{1}{2(1-x^2)} - 2\int \frac{x^3}{1-x^2}dx\right] = \\
&= \frac{x^6}{4(1-x^2)^2} - \frac{3x^4}{4(1-x^2)} + 3\int \frac{x^3}{1-x^2}dx = \\
&= \frac{x^6}{4(1-x^2)^2} - \frac{3x^4}{4(1-x^2)} + 3\left[-\frac{x^2}{2} + \int \frac{x}{1-x^2}dx\right] = \\
&= \frac{x^6}{4(1-x^2)^2} - \frac{3x^4}{4(1-x^2)} - \frac{3x^2}{2} + \frac{3}{2}\ln(1-x^2) + \mathcal{C},\ x\in(-1,\, 1).
\end{aligned}$$

xiv) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x+e^x}dx = x - \int \frac{1+e^x}{1+x+e^x}dx = x - \ln(1+x+e^x) + \mathcal{C},\ x\in[0,\, \infty).$

xv) Se arată că există şi se determină $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$e^x + \cos x = a(e^x + \sin x + \cos x) + b(e^x + \sin x + \cos x)'.$$

Se obţine că $a = b = \dfrac{1}{2}$. Atunci

$$\int \frac{x}{e^x + \sin x + \cos x}\,dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln(e^x + \sin x + \cos x) + \mathcal{C},\ x\in(0,\, \infty).$$

xvi) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+x^5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2)'}{x^4(x^2+1)}dx.$ Calculăm

$$\int \frac{1}{t^2(1+t)}\,dt = \int \left(\frac{1}{t+1} + \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t}\right)dt = \ln(t+1) - \frac{1}{t} - \ln t + \mathcal{C},\ t>0$$

Conform primei formule de schimbare de variabilă vom avea că:

$$\int \frac{1}{x^3+x^5}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \frac{1}{2x^2} - \ln x + \mathcal{C},\ x>0.$$

xvii) Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{|x^2 - 1|}$ este continuă, deci primitivabilă.
Pe intervalul $(-\infty,\ -1]$ avem că

$$\int f(x) = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2}\ln(-x - \sqrt{x^2-1}) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Pe intervalul $(-1\ 1)$ avem că

$$\int f(x) = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Pe intervalul $[1,\ \infty]$ avem că

$$\int f(x) = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2}\ln(x + \sqrt{x^2-1}) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

O primitivă a funcţiei f va fi de forma

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x\sqrt{x^2-1}}{2} + \dfrac{1}{2}\ln(-x - \sqrt{x^2-1}) + c_1 & , \quad x \le -1 \\ \dfrac{x\sqrt{x^2-1}}{2} + \dfrac{1}{2}\arcsin x + c_2 & , \quad -1 < x < 1 \\ \dfrac{x\sqrt{x^2-1}}{2} + \dfrac{1}{2}\ln(x + \sqrt{x^2-1}) + c_3 & , \quad x \ge 1 \end{cases}.$$

Impunând condiţia de continuitate funcţiei F se obţine:

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{\pi}{4} + c_2 \\ c_3 &= \frac{\pi}{4} + c_2 \end{aligned}$$

xviii) Avem

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}dx = \int (1+\ln x)'(1+\ln x)^{1/3}dx = \frac{3}{4}(1+\ln x)\sqrt[3]{1+\ln x} + \mathcal{C},\ x > 0.$$

xix) $\displaystyle\int \frac{1}{x(1+x^4)}dx = \int \Big(\frac{1}{x} - \frac{x^3}{1+x^4}\Big)dx = \ln x - \frac{1}{4}\ln(1+x^4) + \mathcal{C},\ x > 0.$

xx) Integrând prin părţi obţinem:

$$\int \ln(x + \sqrt{1+x^2})\, dx = x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = (x-1)\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + \mathcal{C},\ x \in \mathbb{R}.$$

xxi) Integrând prin părţi obţinem:

$$\int sin(\ln x)\, dx = x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\, dx = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int sin(\ln x)\, dx.$$

Atunci

$$\int sin(\ln x)\, dx = \frac{x}{2}\big(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\big) + \mathcal{C},\ x > 0.$$

xxii) Funcţia $f : [0,\, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1+\cos x}$ este continuă, deci primitivabilă. Deoarece

$$\sqrt{1+\cos x} = \begin{cases} \sqrt{2}\cos\dfrac{x}{2} & ,\quad x \in [0,\ \pi] \\ -\sqrt{2}\cos\dfrac{x}{2} & ,\quad x \in (\pi,\ 2\pi] \end{cases},$$

dacă $F : [0,\, 2\pi] \to \mathbb{R}$ este o primitivă a lui f atunci exustă $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$F(x) = \begin{cases} 2\sqrt{2}\sin\dfrac{x}{2} + c_1 & ,\quad x \in [0,\ \pi] \\ -2\sqrt{2}\cos\dfrac{x}{2} + c_2 & ,\quad x \in (\pi,\ 2\pi] \end{cases}.$$

Impunând funcţie F condiţia de continuitate în $x_0 = \pi$ (i.e. $F(\pi - 0) = F(\pi + 0) = F(\pi)$) deducem că $2\sqrt{2} + c_1 = -2\sqrt{2} + c_2$, iar dacă notă $c_1 = c \in \mathbb{R}$, obţinem:

$$F(x) = \begin{cases} 2\sqrt{2}\sin\dfrac{x}{2} & ,\quad x \in [0,\ \pi] \\ -2\sqrt{2}\sin\dfrac{x}{2} + 4\sqrt{2} & ,\quad x \in (\pi,\ 2\pi] \end{cases} + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

xxiii) $\displaystyle\int \frac{x+\sin x-\cos x-1}{x+e^x+\sin x}\,dx = \int \frac{(x+e^x+\sin x)-(x+e^x+\sin x)'}{x+e^x+\sin x}\,dx = x - \ln(x+e^x+\sin x + \mathcal{C},$ $x \geq 0.$

xxiv) Cu formula de integrare prin părţi, pe intervalul $(0,\, \infty)$ obţinem:

$$\begin{aligned} \int \cos^2\sqrt{x}\,dx &= \int \frac{1+\cos 2\sqrt{x}}{2}\,dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\int \sqrt{x}(\sin 2\sqrt{x})'\,dx = \\ &= \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x}}{2}\sin 2\sqrt{x} - \frac{1}{4}\int \frac{\sin 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \\ &= \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x}}{2}\sin 2\sqrt{x} + \frac{1}{8}\cos 2\sqrt{x} + \mathcal{C}. \end{aligned}$$

Deoarece orice astfel de primitivă este prelungibilă prin continuitate în $x_0 = 0$, rezultă că pe întreg intervalul $[0,\, \infty)$ avem:

$$\int \cos^2\sqrt{x}\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x}}{2}\sin 2\sqrt{x} - \frac{1}{8}\cos 2\sqrt{x} + \mathcal{C}.$$

xxv) Pe intervalul $(0,\, \infty)$ avem:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}\,dx &= \int \frac{e^x-1}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,dx = \int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,dx - \int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,dx = \\ &= \frac{1}{2}\ln\frac{e^x-1}{e^x+1} - \int \frac{1}{e^x\sqrt{e^{2x}-1}}(e^x)'\,dx. \end{aligned}$$

Dar, pe intervalul $(1,\, \infty)$ avem că

$$\int \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}\,dt = \int \frac{1}{t^2\sqrt{1-\left(\frac{1}{t}\right)^2}}\,dt = -\int \frac{\left(\frac{1}{t}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{t}\right)^2}}\,dt = -\arcsin\frac{1}{t} + \mathcal{C},$$

şi deci, conform primei formule de schimbare de variabilă, obţinem:

$$\int \frac{1}{e^x\sqrt{e^{2x}-1}}(e^x)'\,dx = -\arcsin e^{-x} + \mathcal{C}.$$

Atunci

$$\int \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}\,dx = \frac{1}{2}\ln\frac{e^x-1}{e^x+1} + \arcsin e^{-x} + \mathcal{C},\ x \in (0,\ \infty).$$

Acestea sunt şi primitivele cerute pe intervalul $[0,\ \infty)$.

xxvi) Integrând prin părţi, avem

$$\begin{aligned}\int x\arcsin\frac{1}{x}\,dx &= \frac{x^2}{2}\arcsin\frac{1}{x} - \int \frac{x^2}{2}\frac{-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\,dx = \\ &= \frac{x^2}{2}\arcsin\frac{1}{x} + \int \frac{x}{2\sqrt{x^2-1}}\,dx = \frac{x^2}{2}\arcsin\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1} + \mathcal{C},\ x>1.\end{aligned}$$

xxvii) Integrând prin părţi, avem

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx &= \int \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x^2}\,dx = -\int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\left(\frac{1}{x}\right)'\,dx = \\ &= -\frac{1}{2}\left(\ln(\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}) + \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) + \mathcal{C},\ x>0\end{aligned}$$

xxviii) Din $\tan 5x = \tan(3x+2x) = \dfrac{\tan 3x + \tan 2x}{1-\tan 3x\ \tan 2x}$, rezultă că

$$\tan 2x\ \tan 3x\ \tan\ 5x = \tan 5x - \tan 2x - \tan 3x.$$

Atunci

$$\int \tan 2x\ \tan 3x\ \tan\ 5x\,dx = \int (\tan 5x - \tan 2x - \tan 3x)\,dx = -\frac{1}{5}\ln\cos 5x - \frac{1}{3}\ln\cos 3x - \frac{1}{2}\ln\cos 2x + \mathcal{C},\ x \in \left(-\frac{\pi}{10},\ \frac{\pi}{10}\right).$$

xxix) Avem că există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$3\sin x + 4\cos x = a(5\sin x + 6\cos x) + b(5\sin x + 6\cos x)'.$$

şi sunt soluţii ale sistemului

$$\begin{cases} 5a - 6b &= 3 \\ 6a + 5b &= 4 \end{cases}$$

Se obţine $a = \dfrac{39}{61}$, iar $b = \dfrac{2}{61}$. Atunci

$$\int \frac{3\sin x + 4\cos x}{5\sin x + 6\cos x}\,dx = \frac{39}{61}x + \frac{2}{61}\ln(5\sin x + 6\cos x) + \mathcal{C},\ x \in \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right].$$

xxx) Deoarece

$$\sin^5 x\cos^5 x = \frac{tan^5 x}{(1+\tan^2 x)^5},\ x \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right),$$

obţinem că

$$\int \frac{1}{\sin^5 x\cos^5 x}\,dx = \int \frac{(1+\tan^2 x)^4}{\tan^5 x}(\tan x)'\,dx.$$

Deoarece, pentru $t>0$ avem:

$$\int \frac{(1+t^2)^4}{t^5}\,dt = \int \left(t^3 + 4t + \frac{6}{t} + \frac{4}{t^3} + \frac{1}{t^5}\right)dt = \frac{t^4}{4} + 2t^2 + 6\ln t - \frac{2}{t^2} - \frac{4}{t^4} + \mathcal{C},$$

conform primei formule de schimbare de variabilă, rezultă că:

$$\int \frac{1}{\sin^5 x \cos^5 x}\,dx = \frac{\tan^4 x}{4} + 2\tan^2 x + 6\ln\tan x - \frac{2}{\tan^2 x} - \frac{4}{\tan^4 x} + \mathcal{C}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

xxxi) Avem

$$\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}\,dx = \int \frac{\arcsin e^x}{e^{2x}}(e^x)'\,dx.$$

Deoarece, pentru $t > 0$ avem că

$$\begin{aligned}
\int \frac{\arcsin t}{t^2}\,dt &= -\frac{1}{t}\arcsin t + \int \frac{1}{t\sqrt{1-t^2}}\,dt = \\
&= -\frac{1}{t}\arcsin t - \int \frac{\left(\frac{1}{t}\right)'}{\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2 - 1}}\,dt = \\
&= -\frac{1}{t}\arcsin t - \ln\left(\frac{1}{t} + \sqrt{\frac{1}{t^2} - 1}\right) + \mathcal{C},
\end{aligned}$$

conform primei formule de schimbare de variabilă ob ctinem:

$$\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}\,dx = -e^{-x}\arcsin e^x - \ln(e^{-x} + \sqrt{e^{-2x} - 1}) + \mathcal{C}, \quad x \le 0.$$

Capitolul 4

Integrala Riemann

4.1 Breviar teoretic

Deoarece în programa de matematică a clasei a XII-a este ultima mare temă predată la clasă, iar apropierea examenului de bacalaureat devine stresantă, necesitatea unei bune recapitulări nu lasă mult timp prezentării subiectului. Voi încerca o prezentare de tip motivare pentru a explica rolul integralei Riemann, fără a renunţa însă la prezentarea aspectelor teoretice.

4.1.1 Subgraficul unei funcţii şi aria lui

Prin aria unei suprafeţe vom înţelege, într-un limbaj comun, numărul de pătrate, cu latura de lungime egală cu unitatea, ce pot "acoperii" suprafaţa respectivă (în întregime şi fără a o depăşi). Este uşor de văzut că, pentru o suprafaţă în formă de dreptunghi de lungime L şi lăţime l, acest "număr de pătrate" (deci aria sa) este egal cu $L \cdot l$.

Integrala Riemann a apărut (printre altele) din necesitatea de a calcula aria şi a altor suprafeţe plane înafara celor clasice (triunghi, dreptunghi, patrat, trapez). Să considerăm de exemplu o funcţie

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$$

(deci cu valori pozitive). Prin subgrafic al unei astfel de funcţii, notat $\mathcal{S}(G_f)$, vom întţelege "porţiunea" din plan cuprinsă între axa Ox, dreptele de ecuaţie $x = a$ şi $x = b$ şi graficul lui f (vezi Figura 1).

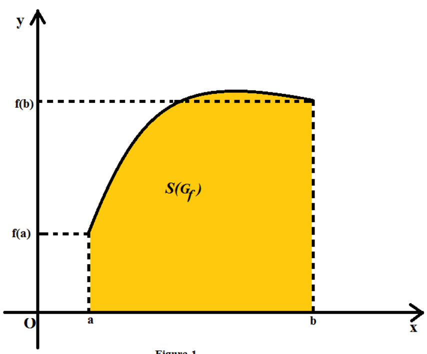

Figura 1

Din punct de vedere matematic vom avea

$$\mathcal{S}(G_f) = \{(x, y) : x \in [a, b], 0 \le y \le f(x)\}.$$

În secolul al XVII-lea F. B. Cavalieri aproxima aria subgraficului funcţie

$$f : [0,\, 1] \to \mathbb{R}_+, \quad f(x) = x^2$$

astfel:

Pentru un număr $n \in \mathbb{N}^*$ segmentul $[0,\, 1]$ este împărţit în n subintervale, de lungimi egale cu $\frac{1}{n}$, prin punctele de forma $\frac{k}{n}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$. Se construiesc apoi dreptunghiurile cu laturile paralele cu axele de coordonate, având una din laturi pe axa Ox, în punctele consecutive $\frac{k-1}{n}$ şi $\frac{k}{n}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, (deci de lungime $\frac{1}{n}$) şi cele perpendiculare pe aceasta de lungime $\frac{k^2}{n^2} = f(\frac{k}{n})$ (vezi Figura 2).

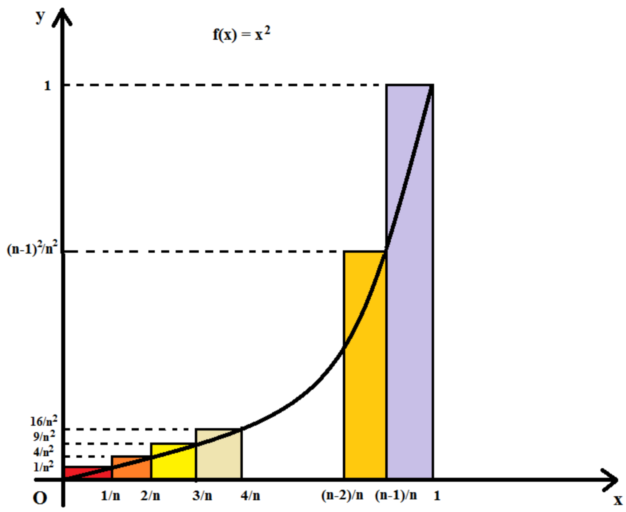

Figura 2

Aria subgraficului funcţie f era aproximată de suma ariilor acestor dreptunghiuri obţinându-se

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\mathcal{S}(G_f)) &\approx \frac{1}{n}\left(\frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \frac{3^2}{n^2} + \ldots + \frac{n^2}{n^2}\right) = \\ &= \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2}{n^3} = \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{6}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\end{aligned}$$

Se observă că ultimul număr calculat este cu atât mai "aproape" de $\frac{1}{3}$ cu cât n este mai mare (şi deci distanţa dintre punctele alese între 0 şi 1 este mai mică). Acest lucrul l-a făcut pe Cavalieri să considere că aria subgraficului funcţiei f este egală cu $\frac{1}{3}$. Probabil că motivaţia a fost că ariile bucaţilor din dreptunghiuri ce nu sunt parte a subgrafului sunt din ce în ce mai mici (când n creşte). De fapt se poate arăta că suma ariilor acestor bucăţii este din ce în ce mai mică (când n creşte).

4.1.2 Integrala Riemann

Se poate observa că suma ariilor dreptunghiurilor de mai sus este de forma:

$$f\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}-\frac{0}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)\left(\frac{2}{n}-\frac{1}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{n}{n}-\frac{n-1}{n}\right)$$

iar acest lucru poate a constitui o motivare a primei definiţii riguroase a noţiunii de *integrală Riemann* dată de matematicianul german Bernhard Riemann.

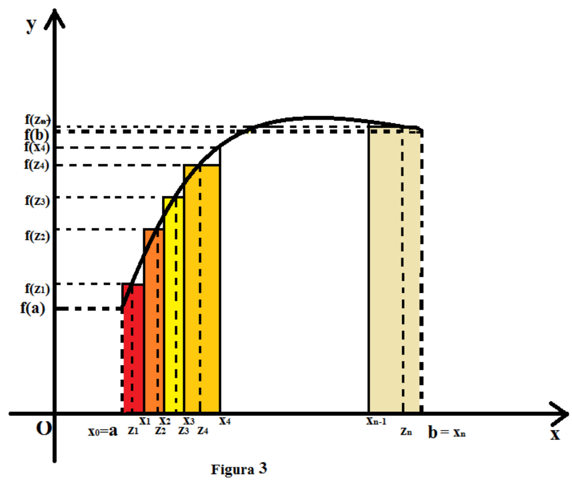

Figura 3

Fie $[a,\, b]$ un interval (închis şi mărginit, $a \leq b$), iar $f : [a,\, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie. O mulţime finită de puncte

$$d = \{x_0, x_1, x_2, \ldots x_n\}$$

astfel ca:

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_i \leq x_{i+1} \leq \ldots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

se numeşte *diviziune* a intervalului $[a,\, b]$. Lungimea celui mai mare interval de forma $[x_i,\, x_{i+1}]$ se numeşte norma diviziunii d şi se noteaza cu $||d||$. Deci

$$||d|| = \max_{0\leq i\leq n-1}(x_{i+1} - x_i).$$

Dacă d este o astfel de diviziune, o mulţime finită

$$\xi_d = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\},$$

cu $z_i \in [x_{i-1},\, x_i]$ se numeşte sistem de puncte intermediare asociat diviziunii d, iar numărul

$$\sigma(f; d, \xi_d) = f(z_1)(x_1 - x_0) + f(z_2)(x_2 - x_1) + f(z_3)(x_3 - x_2) + \ldots + f(z_n)(x_n - x_{n-1}),$$

se numeşte *suma Riemann asociată funcţie f, diviziunii d şi sistemului de puncte intermediare ξ_d*. De fapt $\sigma(f; d, \xi_d)$ este exact suma ariilor dreptunghiurilor colorate din Figura 3.

Se spune ca funcţia f este integrabilă Riemann pe intervalul $[a,\, b]$, dacă pentru orice şir de diviziuni $(d_n)_n$ cu norma tinzând către zero şi pentru orice alegere a punctelor intermediare ξ_{d_n}, şirurile corespunzatoare $(\sigma_{d_n})_n$ de sume integrale Riemann au o limită comună $I \in \mathbb{R}$.

Numărul real I se numeşte integrala Riemann a funcţiei f pe intervalul $[a,\, b]$ se notează:

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

şi este citit "*integrala de la a la b din f de x de x*".

4.1.3 Calculul integralelor Riemann

Stabilirea integrabilităţii Riemann a unei funcţii (proprietatea acesteia de a fi integrabilă Riemann) este rezolvată de caracterizări ale integrabilităţii în funcţie de discontinuităţile acesteia. Este aici suficient să amintim că funcţiile continue, dar şi cele mărginite cu un număr finit de discontinutăţi sunt întotdeauna integrabile Riemann. Ţinând cont de definiţia integralei Riemann obţinem:

Propoziţia 4.1.1 *Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie integrabilă Riemann (în particular dacă aceasta este continuă) atunci există*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\big(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\big) = \int_a^b f(x)dx.$$

Calcularea integralelor Riemann se face prin stabilirea unor reguli şi a unor formule de calcul.

Reguli de calcul:

- Dacă $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sunt integrabile Riemann atunci funcţia $f + g$ este şi ea integrabilă Riemann şi
$$\int_a^b \Big(f(x) + g(x)\Big)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$
(integrala sumei este suma integralelor)
- Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann, iar $k \in \mathbb{R}$ atunci funcţia $k \cdot f$ este şi ea integrabilă Riemann şi
$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$
(constantele ies în faţa integralelor)

Formule de calcul:

- (Formula Leibnitz-Newton) Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este inegrabilă Riemann şi primitivabilă atunci
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$
unde F este o primitivă a funcţiei f (o funcţie derivabilă cu $F' = f$).
- (Formula de integrare prin părţi) Dacă $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sunt două funcţii derivabile atunci funcţia $f \cdot g'$ este integrabilă Riemann dacă şi numai dacă funcţia $f' \cdot g$ este integrabilă Riemann şi are loc egalitatea:
$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

- (prima formulă de schimbare de variabilă) Dacă $u : [a, b] \to I$ este o funcţie derivabilă cu derivata continuă, iar $f : I \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann atunci

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)dx$$

4.1.4 Aplicaţii ale integralei Riemann

Aria unei suprafeţe mărginite de graficele a două funcţii integrabile Riemann

Dacă $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sunt două funcţii atunci mulţimea

$$\Gamma_{f,g} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \in [a, b] \text{ şi } f(x) \le y \le g(x)\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \in [a, b] \text{ şi } g(x) \le y \le f(x)\}$$

se numeşte *suprafaţă mărginită de graficele funcţiilor f şi g şi dreptele de ecuaţii $x = a$ şi $x = b$.*

Dacă funcţiile f şi g sunt integrabile Riemann atunci suprafaţa $\Gamma_{f,g}$ are arie şi

$$\mathcal{A}_{\Gamma_{f,g}} = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx.$$

Lungimea graficului unei funcţii derivabile

Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă cu derivata continuă atunci numărul:

$$l_f = \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}dx$$

se numeşte *lungimea graficului funcţie f*.

Volumul unui corp de rotaţie

Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă, mulţimea

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x \in [a, b] \text{ şi } \sqrt{y^2 + z^2} \le |f(x)|\}$$

se numeşte *corpul de rotaţie* în jurul axei Ox determinat de funcţia f şi are volumul

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

4.2 Probleme propuse

Exerciţiul 4.1 *Calculaţi:*

i) $\displaystyle\int_0^1 xe^{1-x}\,dx$;

ii) $\displaystyle\int_0^\pi x\cos^2 x\,dx$;

iii) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x-[x]}{2x-[x]+1}\,dx$;

iv) $\displaystyle\int_0^2 \max\{1,\ln(1+x^2)\}\,dx$;

v) $\displaystyle\int_1^e \ln^n x\,dx,\ n\in\mathbb{N}$;

vi) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\,dx$;

vii) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 x\,dx$;

viii) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x\sin x}{e^x+1}\,dx$;

ix) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(e^{1/n}-1)\int_0^1 e^x[nx]\,dx$;

x) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x^n\sin x dx$;

xi) $\displaystyle\int_0^1 x^n e^{-x} dx$.

Exerciţiul 4.2 *Pentru $n\in\mathbb{N}^*$ notăm $I_n=\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{x+1}dx$.*

i) *Calculaţi I_1 şi I_2;*

ii) *Arăţi că $I_2\le I_1$ şi deduceţi că $e\ge 2\sqrt[3]{2}$;*

iii) *Arătaţi că şirul $(I_n)_{n\ge 1}$ este convergent şi calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.*

Exerciţiul 4.3 *Fie $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=x^n\arctan x$, $n\in\mathbb{N}$.*

i) *Calculaţi* $\int_0^1 f_n(x)\,dx$, *pentru* $n \in \{0,1\}$;

ii) *Arătaţi că* $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 0$;

iii) *Calculaţi* $\lim_{n\to\infty} (n+1) \int_0^1 f_n(x)\,dx$.

Exerciţiul 4.4 *Se consideră funcţiile* $f, F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1+2x}{1+x^2}$ *şi* $F(x) = \arctan x + \ln(x^2+1)$.

i) *Să se verifice că* F *este o primitivă a funcţie* f.

ii) *Să se calculeze aria suprafeţei plane determinate de graficul funcţie* f, *axa* Ox *şi dreptele de ecuaţie* $x = -1$ *şi* $x = 0$.

iii) *Să se calculeze* $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x^3} \int_{-x}^{x} f(t)F(t)\,dt$.

Exerciţiul 4.5 *Se consideră şirul* $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n = \int_0^1 \dfrac{x^n}{1+x^n}\,dx$.

i) *Să se calculeze* I_1 *şi* I_2;

ii) *Să se arate că* $I_n \leq 1$, *pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$;

iii) *Să se calculeze* $\lim_{n\to\infty} I_n$ *şi* $\lim_{n\to\infty} nI_n$.

Exerciţiul 4.6 *Se consideră şirul* $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n = \int_1^2 \dfrac{x^n}{1+x^n}\,dx$.

i) *Să se calculeze* I_1 *şi* I_2;

ii) *Să se arate că* $I_n \leq 1$, *pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$;

iii) *Să se calculeze* $\lim_{n\to\infty} I_n$ *şi* $\lim_{n\to\infty} nI_n$.

Exerciţiul 4.7 *Se consideră funcţia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$.

i) *Să se calculeze aria suprafeţei plane determinate de graficul funcţie* f, *axa* Ox *şi dreptele de ecuaţie* $x = -1$ *şi* $x = 1$.

ii) *Să se demonstreze că* $\int_1^x \dfrac{f(t)f''(t) - \left(f'(t)\right)^2}{f^2(t)}\,dt = \dfrac{x+1}{x} - 2$, *pentru orice* $x > 1$.

Exerciţiul 4.8 *Să se calculeze:*

i) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n+k}$;

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} k e^{\frac{k}{n}}$;

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n^2+k^2}$;

iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+kn}}$;

v) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \sin \dfrac{\pi}{n+k}$;

vi) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^n e^{-bx} \sin ax\, dx,$ *unde* $a, b \in \mathbb{R},\ b > 0.$

Exerciţiul 4.9 *Se consideră funcţia* $f : \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right],\ f(x) = \cos x.$

i) Să se calculeze aria suprefeţei cuprinse între graficyl funcţie f şi axele de coordonate.

ii) Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotirea graficului funcţiei f în jurul axei Ox.

iii) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - f(\dfrac{1}{\sqrt{n}})\right)\left(f(\dfrac{1}{n}) + f(\dfrac{2}{n}) + \ldots + f(\dfrac{n}{n})\right).$

4.3 Soluţii - Integrala Riemann

Soluţie 4.1 *i)* $\int\limits_0^1 xe^{1-x}dx = \int\limits_0^1 x(-e^{1-x})'dx = -xe^{1-x}\Big|_0^1 + \int\limits_0^1 e^{1-x}dx = -1 + (-e^{1-x})\Big|_0^1 = -1-1+e = e-2$

ii) $\int\limits_0^{\pi} x\cos^2 x dx = \int\limits_0^{\pi} x\frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} xdx + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} x\cos 2xdx = \frac{x^2}{4}\Big|_0^{\pi} + \frac{x}{4}\sin 2x\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi}\sin 2xdx = = \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{8}\cos 2x\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{4}.$

iii) $\int\limits_0^2 \frac{x-[x]}{2x-[x]+1}\,dx = \int\limits_0^1 \frac{x}{2x+1}\,dx + \int\limits_1^2 \frac{x-1}{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \Big(1-\frac{1}{2x+1}\Big)dx + \frac{1}{2}\int\limits_1^2\Big(1-\frac{1}{x}\Big)dx =$

$= \frac{1}{2}\Big(x - \frac{1}{2}\ln(2x+1)\Big)\Big|_0^1 + \frac{1}{2}(x-\ln x)\Big|_1^2 = 1 - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{4}\ln 3 = 1 - \frac{1}{4}\ln 12 \quad .$

iv) Deoarece $\max\{1, \ln(1+x^2)\} = \begin{cases} 1 & , \quad x\in[0,\sqrt{e-1}) \\ \ln(1+x^2) & , \quad x\in[\sqrt{e-1},2] \end{cases}$ se obţine că:

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^2 \max\{1,\ln(1+x^2)\}\,dx &= \int\limits_0^{\sqrt{e-1}} 1\,dx + \int\limits_{\sqrt{e-1}}^2 \ln(1+x^2)\,dx = \\
&= \sqrt{e-1} + x\ln(1+x^2)\Big|_{\sqrt{e-1}}^2 - \int\limits_{\sqrt{e-1}}^2 \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \\
&= 2\ln 5 - 2(x-\arctan x)\Big|_{\sqrt{e-1}}^2 = \\
&= 2\ln 5 + 2\sqrt{e-1} - 4 + 2(\arctan 2 - \arctan\sqrt{e-1}).
\end{aligned}$$

v) $I_n = \int\limits_1^e \ln^n x\,dx = x\ln^n x\Big|_1^e - n\int\limits_1^e \ln^{n-1}x\,dx = e - nI_{n-1},\ n\in\mathbb{N}^*$, cu $I_0 = e-1$.

vi) Cu schimbarea de variabilă $x = \frac{\pi}{4} - t$, vom avea:

$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\big(1+\tan(\frac{\pi}{4}-t)\big)\,dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\frac{2}{1+\tan t}\,dt = \frac{\pi}{4}\ln 2 - I.$

Atunci $I = \frac{\pi}{8}\ln 2.$

vii) Conform Teoremei I de schimbare de variabilă, vom avea:

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 x\,dx &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)^3(\sin x)'\,dx = \int\limits_{\sin 0}^{\sin\frac{\pi}{2}} (1-t^2)^3\,dt = \\
&= \Big(t - t^3 + \frac{3}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7\Big)\Big|_0^1 = \frac{21}{35}.
\end{aligned}$$

viii) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{x\sin x}{e^x+1}\,dx = \int\limits_0^{\pi}\Big(\frac{x\sin x}{e^x+1} + \frac{(-x)\sin(-x)}{e^{-x}+1}\,dx = \int\limits_0^{\pi} x\sin x\,dx = -x\cos x\Big|_0^{\pi} + \sin x\Big|_0^{\pi} = \pi.$

ix) Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem că:

$$\begin{aligned}\int_0^n e^x[nx]\,dx &= = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} e^x[nx]\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} k\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} e^x\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} k\big(e^{\frac{k+1}{n}} - e^{\frac{k}{n}}\big) = \\ &= (n-1)e - \sum_{k=1}^{n-1} e^{\frac{k}{n}} = (n-1)e - e^{\frac{1}{n}}\frac{1-e^{\frac{n-1}{n}}}{1-e^{\frac{1}{n}}},\end{aligned}$$

obţinem că

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(e^{1/n}-1)\int_0^n e^x[nx]\,dx &= \lim_{n\to\infty}(e^{1/n}-1)\Big((n-1)e - e^{\frac{1}{n}}\frac{1-e^{\frac{n-1}{n}}}{1-e^{\frac{1}{n}}}\Big) = \\ &= \lim_{n\to\infty}\Big(e\frac{e^{1/n}-1}{\frac{1}{n}}\frac{n-1}{n} + e^{\frac{1}{n}}(1-e^{\frac{n-1}{n}})\Big) = 1.\end{aligned}$$

x) Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ avem:

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x dx = -x^n\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + n\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n-1}\cos x\,dx = \\ &= n\Big[x^{n-1}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n-2}\sin x dx\Big] = n\Big(\frac{\pi}{2}\Big)^{n-1} - n(n-1)I_{n-2}\end{aligned}$$

cu

$$I_0 = \int_0^{\pi/2}\sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

şi

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx = -x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

xi) Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem:

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}dx = -x^n e^{-x}\Big|_0^1 + n\int_0^1 x^{n-1}e^{-x}dx = -\frac{1}{e} + nI_{n-1}$$

cu

$$I_0 = \int_0^1 e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{e}.$$

Soluţie 4.2 *i*) $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{x+1}dx = \int_0^1\Big(1 - \frac{1}{x+1}\Big)dx = (x - \ln(x+1))\Big|_0^1 = 1 - \ln 2.$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx = \int_0^1\Big(x - 1 + \frac{1}{x+1}\Big)dx = \Big(\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)\Big)\Big|_0^1 = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

ii) Deoarece $x^2 \leq x$, pentru orice $x \in [0, 1]$, rezultă că $\frac{x^2}{x+1} \leq \frac{x}{x+1}$, pentru orice $x \in [0, 1]$. Conform proprietăţii de monotonie a integralei Riemann avem şi că

$$I_2 = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx \leq \int_0^1 \frac{x}{x+1}dx = I_1.$$

Această inegalitate arată că $\ln 2 - \frac{1}{2} \leq 1 - \ln 2$ ceea ce este echivalent cu $e \geq 2\sqrt[3]{2}$.

iii) Deoarece $0 \leq \frac{x^n}{x+1} \leq x^n$, pentru orice $x \in [0, 1]$ şi $n \in \mathbb{N}$, din proprietatea de monotonie a integralei Riemann abţinem că

$$0 \leq I_n \leq ds \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Cum $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, conform Teoremei "cleştelui", rezultă că există $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$.

Soluţie 4.3 *i*) $\int_0^1 f_0(x)\,dx = \int_0^1 \arctan x\,dx = x \arctan x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$

$\int_0^1 f_1(x)\,dx = \int_0^1 x \arctan x\,dx = \frac{x^2}{2}\arctan x\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}(x - \arctan x)\Big|_0^1 = \frac{3\pi}{8} - \frac{1}{2}.$

ii) Deoarece $0 \leq \arctan x \leq \frac{\pi}{4}$, pentru orice $x \in [0, 1]$, avem că

$$0 \leq x^n \arctan x \leq \frac{\pi}{4} x^n,$$

pentru orice $x \in [0, 1]$ şi deci, conform proprietăţii de monotonie a integralei Riemann, obţinem:

$$0 \leq \int_0^1 f_n(x)\,dx \leq \int_0^1 \frac{\pi}{4} x^n\,dx = \frac{\pi}{4(n+1)}, n \in \mathbb{N}.$$

Conform Teoremei "cleştelui", rezultă că există

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 0.$$

iii) Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem:

$$(n+1)\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \left(x^{n+1}\right)' \arctan x\,dx = x^{n+1} \arctan x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x^2+1}\,dx.$$

Cum $0 \leq \frac{x^{n+1}}{1+x^2} \leq x^{n+1}$, pentru orice $x \in [0, 1]$, rezultă că

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^2}\,dx \leq \int_0^1 x^{n+1}\,dx = \frac{1}{n+2}, n \in \mathbb{N}$$

şi deci $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^2}\,dx = 0$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} (n+1)\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

Soluţie 4.4 *i*) Se verifică prin calcul direct că $F'(x) = f(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

ii) $\mathcal{A} = \int\limits_{-1}^{0} |f(x)|\, dx = \int\limits_{-1}^{-1/2} f(x)\, dx + \int\limits_{-1/2}^{0} f(x)\, dx = F(-1) - 2F(-\frac{1}{2}) + F(0) = 2\arctan\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \ln\frac{32}{25}.$

iii) Deoarece

$$\begin{aligned}\int\limits_{-x}^{x} f(t)F(t)\, dt &= \frac{1}{2}F^2(t)\Big|_{-x}^{x} = \frac{1}{2}\big(\arctan x + \ln(x^2+1)\big)^2 - \frac{1}{2}\big(-\arctan x + \ln(x^2+1)\big)^2 = \\ &= 2\arctan x \cdot \ln(x^2+1)\end{aligned}$$

vom obţine:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\int\limits_{-x}^{x} f(t)F(t)\, dt = 2\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}\ln(1+x^2)^{1/x^2} = 2.$$

Soluţie 4.5 *i)* $I_1 = \int\limits_0^1 \frac{x}{x+1}dx = \int\limits_0^1 \Big(1 - \frac{1}{x+1}\Big)dx = (x - \ln(x+1))\Big|_0^1 = 1 - \ln 2.$

$I_2 = \int\limits_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}dx = \int\limits_0^1 \Big(1 - \frac{1}{x^2+1}\Big)dx = \Big(x - \arctan x\Big)\Big|_0^1 = 1 - \frac{\pi}{4}.$

ii) Deoarece $\frac{x^n}{1+x^n} \le 1$, pentru orice $x \in [0,\, 1]$, din proprietatea de monotonie a integralei Riemann obţinem concluzia dorită.

iii) Deoarece $\frac{x^n}{1+x^n} \le x^n$, pentru orice $x \in [0,\, 1]$ şi $n \in \mathbb{N}^*$, rezultă că

$$0 \le \int\limits_0^1 \frac{x^n}{x^n+1}dx \le \int\limits_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1},$$

de unde se deduce că $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.

Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem:

$$nI_n = n\int\limits_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\, dx = \int\limits_0^1 x\big(\ln(1+x^n)\big)'\, dx = x\ln(1+x^n)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \ln(1+x^n)\, dx = \ln 2 - \int\limits_0^1 \ln(1+x^n)\, dx.$$

Cum $0 \le \ln(1+x^n) \le x^n$, pentru orice $x \in [0,\, 1]$ şi $n \in \mathbb{N}^*$ obţinem:

$$0 \le \int\limits_0^1 \ln(x^n+1)dx \le \int\limits_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

şi deci $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 \ln(x^n+1)dx = 0$ ceea ce arată că $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n = \ln 2$.

Soluţie 4.6 *i)* $I_1 = \int\limits_1^2 \frac{x}{x+1}dx = \int\limits_1^2 \Big(1 - \frac{1}{x+1}\Big)dx = (x - \ln(x+1))\Big|_1^2 = 1 - \ln\frac{3}{2}.$

$I_2 = \int\limits_1^2 \frac{x^2}{x^2+1}dx = \int\limits_1^2 \Big(1 - \frac{1}{x^2+1}\Big)dx = \Big(x - \arctan x\Big)\Big|_1^2 = 1 - \arctan 2 + \frac{\pi}{4}.$

ii) Deoarece $\dfrac{x^n}{1+x^n} \leq 1$, pentru orice $x \in [1, 2]$, din proprietatea de monotonie a integralei Riemann, obţinem concluzia dorită.

iii) Avem că

$$\int_1^2 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx = \int_1^2 \Big(1 - \frac{1}{x^n+1}\Big)dx = 1 - \int_1^2 \frac{1}{x^n+1}dx.$$

Cum $0 \leq \dfrac{1}{1+x^n} \leq \dfrac{1}{x^n}$, pentru orice $x \in [1, 2]$, obţinem că

$$0 \leq \int_1^2 \frac{1}{1+x^n}\,dx \leq \int_1^2 x^{-n}\,dx = \frac{1}{n+1}\Big(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\Big)$$

şi deci, conform Teoremei "cleştelui", există $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{1+x^n}\,dx = 0$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^2 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx = 1 - \lim_{n\to\infty} \int_1^2 \frac{1}{1+x^n}\,dx = 1.$$

Soluţie 4.7 *i*) Este imediat că funcţia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = (x-1)e^x$ este o primitivă a funcţie f. Atunci

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^1 |f(x)|\,dx = -\int_{-1}^0 f(x)\,dx + \int_0^1 f(x)\,dx = F(1) + F(-1) - 2F(0) = 2(1-e^{-1}).$$

$$ii)\ \int_1^x \frac{f(t)f''(t) - \big(f'(t)\big)^2}{f^2(t)}\,dt = \int_1^x \Big(\frac{f'}{f}\Big)'(t)\,dt = \Big(\frac{f'}{f}\Big)(t)\Big|_1^x = \frac{t+1}{t}\Big|_1^x = \frac{x+1}{x} - 2.$$

Soluţie 4.8 *i*) $\sum\limits_{k=1}^n \dfrac{1}{n+k} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^n \dfrac{1}{1+\frac{k}{n}} = \sigma(f; d_n, z_{d_n})$, unde

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{1+x},$$

$$d_n\ :\ 0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \ldots < \frac{n-1}{n} < 1,$$

iar

$$z_{d_n} = \Big\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\Big\}.$$

Deoarece funcţia f este continuă (deci integrabilă Riemann), iar $||d_n|| = \dfrac{1}{n} \to 0$, rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \lim_{n\to\infty} \sigma(f; d_n, \xi_{d_n}) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \ln(1+x)\Big|_0^1 = \ln 2.$$

ii) Avem

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n k e^{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{k}{n} e^{\frac{k}{n}} = \sigma(f; d_n, \xi_{d_n}),$$

unde

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = xe^x,$$

iar d_n şi ξ_{d_n} sunt ca mai sus. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k e^{\frac{k}{n}} = \int_0^1 x e^x \, dx = (x-1)e^x \Big|_0^1 = 1.$$

iii) Pentru $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, diviziunile d_n şi sistemele de puncte intermediare ξ_{d_n} de mai sus, avem:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \lim_{n\to\infty} \sigma(f; d_n, \xi_{d_n}) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

iv) Pentru $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$, diviziunile d_n şi sistemele de puncte intermediare ξ_{d_n} de mai sus, avem:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+kn}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \sigma(f; d_n, \xi_{d_n}) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}} \, dx = 2\sqrt{1+x} \Big|_0^1 = \sqrt{2} - 1.$$

v) Dacă $\varepsilon > 0$, deoarece $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, rezultă că există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$(1-\varepsilon)\frac{\pi}{n+k} < \sin \frac{\pi}{n+k} < (1+\varepsilon)\frac{\pi}{n+k},$$

pentru orice $n \geq n_0$. Atunci

$$\pi(1-\varepsilon) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} < \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{\pi}{n+k} < \pi(1+\varepsilon) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k},$$

pentru orice $n \geq n_0$. Conform punctului **i)** rezultă

$$\pi(1-\varepsilon)\ln 2 \leq \liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{\pi}{n+k} \leq \limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{\pi}{n+k} \leq \pi(1+\varepsilon)\ln 2,$$

pentru orice $\varepsilon > 0$. Deci există

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{\pi}{n+k} = \pi \ln 2.$$

vi) Integrând prin părţi obţinem:

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^n e^{-bx} \sin ax \, dx = -\frac{1}{b} e^{-bx} \sin ax \Big|_0^n + \frac{a}{b} \int_0^n e^{-bx} \cos ax \, dx = \\ &= \frac{e^{-nb}}{b} \sin na - \frac{a}{b^2} e^{-bx} \cos ax \Big|_0^n - \frac{a^2}{b^2} \int_0^n e^{-bx} \sin ax \, dx = \\ &= \frac{e^{-nb}}{b} \sin na - \frac{a e^{-nb}}{b^2} \cos na + \frac{a}{b^2} - \frac{a^2}{b^2} I_n. \end{aligned}$$

Rezultă că

$$I_n = \frac{b^2}{a^2+b^2} \left[\frac{a}{b^2} - \frac{a e^{-nb}}{b^2} \cos na + \frac{e^{-nb}}{b} \sin na \right],$$

pentru orice $n \geq 0$ şi deci $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \dfrac{a}{a^2+b^2}$.

vi) $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+(k-1)n+k}}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{k-1}{n}+\dfrac{k}{n^2}}}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

Dacă, pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$ considerăm diviziunea

$$d_n\,:\,0<\frac{1}{n}<\frac{2}{n}<\ldots<\frac{n-1}{n}<1,$$

notând $\xi_k^n=\dfrac{k-1}{n}+\dfrac{k}{n^2}$, $k=\overline{1,n}$, avem că

$$\frac{k-1}{n}<\frac{k-1}{n}+\frac{k}{n^2}\leq\frac{k}{n},$$

pentru orice $k=\overline{1,n}$. Atunci mulţimea

$$\xi_{d_n}=\Big\{\xi_1^n,\xi_2^n,\ldots,\xi_n^n\Big\},$$

este un sistem de puncte indermediare corespunzător diviziunii d_n şi deci

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+(k-1)n+k}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{k-1}{n}+\dfrac{k}{n^2}}}=\sigma(f;d_n,\xi_{d_n}),$$

unde $f:[0,\,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$.

Deoarece funcţia f este continuă, iar $||d_n||=\dfrac{1}{n}\to0$, rezultă că

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+(k-1)n+k}}=\lim_{n\to\infty}\sigma(f;d_n,\xi_{d_n})=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x}}\,dx=2\sqrt{1+x}\Big|_0^1=2(\sqrt{2}-1).$$

Soluţie 4.9 *i)* $\mathcal{A}=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1.$

ii) $\mathcal{V}=\pi\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2x\,dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos2x}{2}\,dx=\frac{\pi}{2}\Big(x+\frac{\sin2x}{2}\Big)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}.$

iii) Fie

$$g:[0,\,1]\to\mathbb{R},\;\;g(x)=\cos x$$

iar pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$ diviziunile

$$d_n\,:\,0<\frac{1}{n}<\frac{2}{n}<\ldots<\frac{n-1}{n}<1$$

şi sistemele de puncte intermediare

$$\xi_{d_n}=\Big\{\frac{1}{n},\frac{2}{n},\ldots,\frac{n-1}{n},1\Big\}.$$

Atunci

$$\Big(1-f(\frac{1}{\sqrt{n}})\Big)\Big(f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+\ldots+f(\frac{n}{n})\Big)=\frac{1-\cos\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{\dfrac{1}{n}}\sigma(g;d_n,\xi_{d_n}),$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Cum $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-\cos\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{\dfrac{1}{n}} = \dfrac{1}{2}$. De asemenea, funcţia g fiind continuă, iar $||d_n|| = \dfrac{1}{n} \to 0$, rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(g; d_n, \xi_{d_n}) = \int_0^1 \cos x\, dx = \sin 1$$

şi deci

$$\lim_{n\to\infty} \Big(1 - f\big(\frac{1}{\sqrt{n}}\big)\Big)\Big(f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + \ldots + f(\frac{n}{n})\Big) = \frac{\sin 1}{2}.$$

Capitolul 5

Teste de pregătire

5.1 Testul 1

Exerciţiul 1. În mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A(x) = \begin{pmatrix} 1+5x & -2x \\ 10x & -4x+1 \end{pmatrix}$, unde $x \in \mathbb{R}$.

i) Să se calculeze $\Big(A(1) - I_2\Big)^3$.

ii) Să se verifice că $A(x)A(y) = A(x+y+xy)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

iii) Să se calculeze produsul $A(1) \cdot A(2) \cdot \ldots \cdot A(2019)$.

Exerciţiul 2. Fie $G = \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$, legea $x \star y = 2xy - x - y + 1$, $x, y \in \mathbb{R}$, iar

$$\mathcal{M} = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & 1-x \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-x & 0 & x \end{pmatrix} \, : \, x > \frac{1}{2} \right\}.$$

i) Arătaţi că $A(x)A(y) = A(x \star y)$, pentru orice $x, y \in G$.

ii) Arătaţi că $\Big(\mathcal{M}, \cdot\Big)$ este grup comutativ.

iii) Ştiind că $\big(G, \star\big)$ este un grup, arătaţi că $\Big(\mathcal{M}, \cdot\Big)$ este izomorf cu $(G, \star)$.

Exerciţiul 3. Se consideră funcţia $f : (-\infty, -3) \cup (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\left(1 + \frac{3}{x}\right)$.

i) Să se arate că funcţia f este concavă pe $(-\infty, -3)$.

ii) Să se determine limita şirului $(a_n)_{n\geq 1}$, unde

$$a_n = n\Big(f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n) - \ln\frac{n(n+1)(n+2)}{6}\Big), \; n \geq 1.$$

iii) Să se arate că există $c \in (2, 3)$ astfel încât $(c-2)f'(c) + f(c) = \ln 2$.

Exerciţiul 4. Se consideră funcţiile $f, g : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$, $g(x) = (x+1)\ln x - x + 1$.

i) Să se arate că funcţia g este o primitivă a funcţiei f.

ii) Calculaţi aria suprafeţei cuprinse între graficul funcţiei f axa Ox şi dreptele de ecuaţie $x = 1$ şi $x = e$.

iii) Calculaţi $\int\limits_1^2 f(x)g(x)dx$.

5.2 Testul 2

Exercițiul 1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$, unde $a, b \in \mathbb{Z}$.

i) Să se calculeze A^2.

ii) Să se verifice că $A^2 = aI_2 + bA$, pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}$.

iii) Determinați toate matricele $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ cu proprietatea că $AX = XA$.

Exercițiul 2. Se consideră mulțimea $G = (-2,\ 2)$ și legea de compoziție $x \star y = \dfrac{4x + 4y}{4 + xy}$, $x, y \in G$.

i) Arătați că $\Big(G, \star\Big)$ este un grup comutativ.

ii) Dacă $f : (-2,\ 2) \to (0,\ \infty)$, $f(x) = \dfrac{2 - x}{2 + x}$, iar $g : (0,\ \infty) \to (-2,\ 2)$, $g(x) = \dfrac{2(x-1)}{x+1}$, calculați $g \circ f$ și arătați că funcția f este bijectivă.

iii) Arătați că $f(x \star y) = f(x)f(y)$, pentru orice $x, y \in G$.

iv) Calculați $\dfrac{1}{2} \star \dfrac{1}{3} \star \ldots \star \dfrac{1}{2021}$.

Exercițiul 3. Se consideră funcțiile $f, g : (0,\ \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x + 2x$, $g(x) = x(\ln x - 1) + x^2 + 1$.

i) Să se arate că funcția g este o primitivă a funcției f.

ii) Determinați primitiva funcției f care ia valoarea 2020 în $x = 1$.

iii) Calculați $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{g(x) - g(1)}{x - 1}$.

iv) Calculați aria suprafeței cuprinse între graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuație $x = 1$ și $x = e$.

v) Arătați că $\displaystyle\int_1^2 f(x)g(x)dx = 2(1 + \ln 2)(2 + \ln 2)$.

Exercițiul 4. Calculați

$$\int \frac{5 + 2\ln x}{mx + x\ln(ex) \cdot \ln(e^2x) \cdot \ln(e^3x)\ln(e^4x)}\, dx,\ \ x \in (1,\ +\infty),$$

unde $m \in \mathbb{R}$.

5.3 Testul 3.

Exerciţiul 1. Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

i) Arătaţi că $(I_2 + A)^2 = I_2 + A$.

ii) Determinaţi numărul elementelor mulţimii $\{A^n : n \in \mathbb{N}^*\}$.

iii) Calculaţi $\det(2018\, I_2 - A + A^2 - A^3 + \ldots + A^{2018})$.

Exerciţiul 2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 3^x + 1 & , \quad x \leq 1 \\ a\sqrt{3x^2 + x} + 2 & , \quad x > 1 \end{cases}$.

i) Determinaţi asimptotele la graficul funcţiei f.

ii) Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{f(x) - 2}{x^2} + 1\right)^x$.

iii) Determinaţi $a \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia f să fie continuă pe $\mathbb{R}$.

Exerciţiul 3. Pentru $n \in \mathbb{N}$ vom nota în continuare cu $u(n)$ ultima cifră a numărului natural n. Pe mulţimea $G = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ definim legea de compoziţie

$$x \circ y = u(xy),\ x, y \in G$$

. Admitem că legea de compoziţie "$\circ$" este asociativă.

i) Determinaţi valorile $x \in G$ pentru care $5 \circ x = 0$.

ii) Alcătuiţi tabla legii de compoziţie "$\circ$" pe mulţimea G.

iii) Arătaţi că $H = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ este parte stabilă a lui G faţă de legea de compoziţie "$\circ$".

iv) Determinaţi elementele simetrizabile faţă de legea "$\circ$"

Exerciţiul 4. a) Calculaţi $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} x^n \cos x\, dx$, pentru $n \in \{2, 3\}$.

b) Arătaţi că există şi calculaţi $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} x^n \cos x\, dx$.

5.4 Testul 4

Exercițiul 1. Pentru $x \in \mathbb{R}$ se definește matricea

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^x \end{pmatrix}.$$

a) Arătați că $A(x) \cdot A(y) = A(x+y)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Calculați $(A(2021))^n$, unde n este un număr natural nenul.

c) Calculați $\det\left(A(1) \cdot A(2) \cdot A(2^2) \cdot \ldots \cdot A(2^{2021})\right)$.

Exercițiul 2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă

$$x * y = \frac{1}{4}xy + x + y, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Arătați că $2021 * (-4) = -4$.

b) Determinați elementul neutru al legii $*$ și elementele simetrizabile față de legea $*$.

c) Calculați $(-2021) * (-2020) * (-2019) * \ldots * 0 * 1$.

Exercițiul 3. Calculați limitele:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1}\right)$;

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin(ax^2 + bx + c)}{x^2 - 1}$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $a + b + c = \pi$.

Exercițiul 4. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{4 + x^2}$. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ notăm $I_n = \int\limits_0^1 x^n f(x) dx$.

a) Arătați că $\int\limits_0^1 (f^2(x) - 4) dx = \dfrac{1}{3}$.

b) Calculați I_1 și arătați că $I_1 \leq I_0$.

c) Arătați că șirul $(I_n)_{n \geq 0}$ este convergent și calculați $\lim\limits_{n \to \infty} I_n$.

5.5 Testul 5.

Exerciţiul 1. În mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ şi $X(a) = I_2 + aA$, unde $a \in \mathbb{R}$.

i) Să se calculeze A^3.

ii) Să se verifice că $X(a)X(b) = X(a+b+ab)$, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$.

iii) Să se calculeze produsul $X(1) \cdot X(2) \cdot \ldots \cdot X(2022)$.

Exerciţiul 2. Se consideră funcţia $f : (-\infty, -2) \cup (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\left(1 + \dfrac{2}{x}\right)$.

i) Să se arate că funcţia f este concavă pe $(-\infty, -2)$.

ii) Să se determine limita şirului $(a_n)_{n\geq 1}$, unde $a_n = f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n) - \ln \dfrac{n(n+1)}{2}$.

iii) Să se arate că există $c \in (1, 2)$ astfel încât $(c-1)f'(c) + f(c) = \ln 2$.

Exerciţiul 3. Se consideră funcţiile $f, F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^3} e^{-\frac{2}{x}}$ şi $F(x) = \left(\dfrac{a}{x} + b\right) e^{-\frac{2}{x}}$.

i) Să se calculeze $\displaystyle\int \sqrt{f(x) e^{\frac{1}{x}}}\, dx$.

ii) Determinaţi $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia F să fie o primitivă a funcţie f.

ii) Calculaţi $\displaystyle\int \left(f''(x)f(x) - \left(f'(x)\right)^2\right) x^6 e^{\frac{4}{x}}\, dx$.

Exerciţiul 4. Fie funcţia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^6}$.

i) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 x^2 f(x) dx$.

ii) Arătaţi că $\dfrac{\pi}{4} \leq \displaystyle\int_0^1 f(x) dx \leq 1$

iii) Calculaţi $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)f''(x) - \left(f'(x)\right)^2}{f^2(x)} dx$.

5.6 Testul 6.

Exerciţiul 1. Considerăm matricele $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & -a \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & a & -1 \end{pmatrix}$ şi sistemul liniar $\begin{cases} ax + y - az = 1 \\ x - y + 2z = 1 \\ x + ay - z = 1 \end{cases}$, unde $a \in \mathbb{R}$.

i) Calculaţi $\det A(1)$;

ii) Determinaţi $a \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul este compatibil unic determinat;

iii) Determinaţi toate valorile $a \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul este compatibil.

Exerciţiul 2. Pentru $x, y \in \mathbb{R}$ notăm $x * y = xy - 9x - 9y + 90$ şi fie $G = [8, 10]$. Precizaţi care din afirmaţiile de mai jos sunt adevărate, justificând răspunsul dat.

i) $x * y \in G$, pentru orice $x, y \in G$;

ii) $\Big(G, *\Big)$ este monoid dar nu este grup;.

iii) $\Big(G \setminus \{9\}, *\Big)$ este grup comutativ;

iv) Suma elementelor inversabile ale monoidului $\Big(G, *\Big)$ este egală cu 18.

Exerciţiul 3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - a^2x + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Dacă M şi m sunt extremele locale ale funcţie f, calculaţi produsul $M \cdot m$.

Exerciţiul 4. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & , \ x \leq 1 \\ ax^2 - ax + b & , \ x > 1 \end{cases}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$.

i) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia f să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$.

ii) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ dacă $\displaystyle\int_{-1}^{2} |f(x)| dx = 3$.

5.7 Testul 7.

Exerciţiul 1. Pentru $t \in \mathbb{R}$ considerăm matricele

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1-\cos t & \sin t \\ \sin t & 1+\cos t \end{pmatrix}, \qquad B(t) = \begin{pmatrix} 1+\cos t & -\sin t \\ -\sin t & 1-\cos t \end{pmatrix}.$$

i) Calculaţi $A(t)B(t)$, $B(t)A(t)$ şi determinaţi mulţimea $M = \{t \in \mathbb{R} : A(t) \text{ este inversabilă }\}$;

ii) Calculaţi $\det\Big(A(t)^3 + B(t)^3\Big)$;

iii) Arătaţi că există şi determinaţi $r \in \mathbb{R}$ astel încât $A(t)^{2021} = r^{2020}A(t)$ şi $B(t)^{2021} = r^{2020}B(t)$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$.

Exerciţiul 2. Pe $\mathbb{Z}$ definim legea de compoziţie $x \circ y = xy - 3x - 3y + 12$, $x, y \in \mathbb{Z}$.

i) Arătaţi că legea de compoziţie "$\circ$" este asociativă.

ii) Determinaţi elementele simetrizabile faţă de legea "$\circ$".

iii) Calculaţi $(-2021) \circ (-2020) \circ (-2019) \circ \ldots \circ 2019 \circ 2020 \circ 2021$;

iv) Determinaţi $x \in \mathbb{Z}$ pentru care $\underbrace{x \circ x \circ x \ldots \circ x}_{2021\, ori} = x$.

Exerciţiul 3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)e^{-x}$.

i) Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţie f;

ii) Arătaţi că $f(x) \leq 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$;

iii) Arătaţi că $\sqrt{3}e^{\sqrt{2}} < \sqrt{2}e^{\sqrt{3}}$.

Exerciţiul 4. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (2x^2 - x + 1)e^{2x}$.

i) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = (x^2 + ax + b)e^{2x}$ să fie o primitivă a funcţie f.

ii) Determinaţi primitiva, F, a funcţie f cu proprietatea că $F(0) = \dfrac{9}{4}$.

iii) Arătaţi că orice primitivă a funcţie f este convexă.

5.8 Testul 8.

Exercițiul 1. În mulţimea S_3 a tuturor permutărilor de ordinul 3 se consideră permutarea

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

.

i) Să se determine numărul elementelor mulţimii $\{\sigma^n \ : \ n \in \mathbb{N}^*\}$;

ii) Determinaţi toate permutările $x \in S_3$ asfel încât $x\sigma = \sigma x$;

iii) Să se rezolve ecuaţia $x^2 = \sigma$, cu $x \in S_3$.

Exercițiul 2. Considerăm matricele de ordinul 3, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ şi $B(m) = \begin{pmatrix} m & 2m-1 & 2m+1 \\ 0 & 3m-2 & m \\ 0 & 0 & m-2 \end{pmatrix}$.

i) Determinaţi valorile $m \in \mathbb{R}$ pentru care $A \cdot B(m) = B(m) \cdot A$;

ii) Determinaţi $m \in \mathbb{R}$ pentru care $\operatorname{rang}(B(m)) = 2$;

iii) Determinaţi $m \in \mathbb{R}$ pentru care inversa matricei $B(m)$ este matricea A. .

Exercițiul 3. Se consideră funcţia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)(1+x^3)}$.

i) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 (1+x^3) f(x)\, dx$;

ii) Să se arate că $\displaystyle\int_{1/x}^1 f(t)\, dt = \int_1^x t^3 f(t)\, dt$, pentru orice $x > 0$;.

iii) Să se calculeze $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \int_{1/x}^x f(t)\, dt$.

Exercițiul 4. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - \sin x$.

i) Să se arate că funcţia f este strict crescătoare;

ii) Rezolvaţi ecuaţia $f(x) = 0$;

iii) Să se arate că funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt[3]{f(x)}$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

5.9 Testul 9.

Exercițiul 1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} a\cos \pi x - bx + 1 & , \quad x \le 2 \\ \ln(x-1) & , \quad x > 2 \end{cases}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$

i) Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția f să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$;

ii) Pentru $a = -3$ și $b = -1$, calculați $\int\limits_1^3 f(x)\,dx$;

iii) Dacă pentru $n \in \mathbb{N}$ notăm $I_n = \int\limits_2^3 f^n(x)\,dx$, arătați că șirul $(I_n)_{n\ge 0}$ este convergent și calculați $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

Exercițiul 2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - x + 1)e^{-x}$.

i) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = -(x^2 + ax + b)e^{-x}$ să fie o primitivă a funcție f.

ii) Determinați primitiva, G, a funcție f cu proprietatea că $G(0) = -1$.

iii) Arătați că orice primitivă a funcție f este convexă pe intervalul $[1,\ 2]$.

Exercițiul 3. Considerăm șirul $(I_n)_{n\ge 1}$, unde $I_n = \int\limits_0^1 \frac{x^n}{2x+1}\,dx$, $n \ge 1$.

i) Să se calculeze I_1, I_2 și să se deducă inegalitatea $\ln 3 \le \frac{4}{3}$.

ii) Să se arate că $2I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

iii) Arătați că $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$ și calculați $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n$.

Exercițiul 4. Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x \operatorname{arctg} x$, $g(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$.

i) Calculați $\int (1 + 4x^2) f(2x)\,dx$;

ii) Arătați că $2\int\limits_0^1 f(x)\,dx \le \pi \int\limits_0^1 g(x)\,dx$;

iii) Calculați $\int\limits_0^1 \Big(f(x) + g(x)\Big)\,dx$.

Bibliografie

[1] L. Aramă, T. Morozan - *Culegere de probleme de calcul diferenţial şi integral*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1978.

[2] L. Aramă, T. Morozan - *Culegere de probleme de analiză matematică pentru bacalaureat şi admitere în învăţământul superior*, Ed. Universal Pan, Bucureşti, 1996.

[3] N. Boboc - *Analiza Matematica, Vol. 2*, Ed Universităţii din Bucureşti, 1998

[12] C. Niculescu - *Fundamentele analizei matematice*, Ed. Academiei, 1996.

[13] P. Preda - *Analiza matematică. Calcul diferenţial în* $\mathbb{R}^p$, Tip. Univ. Timişoara, 1988.

[17] V. Radu - *Lecţii de matematici elementare. Partea II-a*, Ed Augusta, 2000.

[20] Gh. Sireţchi - *Calcul diferenţial şi integral. Vol I, II*, Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985.

[21] O. Stănăşilă - *Analiză Matematică*, Ed Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.