Materiale didactice suport
pentru pregătirea pentru examenul de bacalaureat
la disciplina

# *Fizică - Mecanică*

Elaborat de
*Conf. univ. dr. Paul Barvinschi*

*Material elaborat în cadrul proiectului CNFIS-FDI-2021-0471 „UVT – Acces și echitate în învățământul superior”*

# Cuprins

# Capitolul I – *Noțiuni teoretice*

## I.1. Mărimi fizice și unități de măsură

Descrierea stărilor și proceselor sistemelor fizice se realizează cu ajutorul *mărimilor fizice*. Prin mărime fizică se înțelege o proprietate a sistemului fizic (sau a corpurilor și fenomenelor implicate în cadrul acestuia) care poate fi deosebită calitativ și determinată cantitativ (*măsurată*).

Măsurarea reprezintă ansamblul de operații experimentale prin care o mărime fizică având simbolul $X$ este comparată cu o altă mărime de aceeași natură $[X]$, aleasă ca element de comparație și denumită unitate de măsură. Rezultatul măsurătorii se exprimă sub forma unui număr real $x$, care se numește valoarea numerică a mărimii măsurate, și se poate scrie:

$$X = x[X]$$

Unitatea de măsură a unei mărimi fizice poate fi aleasă în mod arbitrar și independent de alte unități de măsură. Totuși, s-a dovedit că este mai practic să se aleagă un număr restrâns de mărimi fizice independente care se definesc direct, prin indicarea procedeului de măsurare și a unității de măsură pentru fiecare dintre ele, acestea se numesc *mărimi fundamentale*. Mărimile care se definesc cu ajutorul celor fundamentale se numesc *mărimi derivate*. Unitățile de măsură corespunzătoare celor două tipuri de mărimi se numesc *unități fundamentale* și respectiv *unități derivate*. Totalitatea unităților de măsură (fundamentale și derivate) constituie un *sistem de unități de măsură*. În România a fost legiferată în 1961 utilizarea Sistemului Internațional de Unități (prescurtat S.I.).

Simbolurile mărimilor fizice, folosite în mod uzual, sunt litere din alfabetul latin sau cel grec. Simbolurile unităților de măsură ale mărimilor fizice sunt litere din alfabetul latin (în unele cazuri se mai adaugă încă ceva, cum ar fi $^{o}$C pentru temperatura în grade Celsius, sau linie de fracție pentru unele unități derivate, cum ar fi m/s pentru unitatea de măsură a vitezei). Există și mărimi fizice care nu au unitate de măsură, acestea se numesc mărimi adimensionale (randamentul notat de obicei cu $\eta$, indicele de refracție notat cu $n$, și altele). Mai jos este prezentat alfabetul grec.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Α | α | Alfa | Ν | ν | Niu |
| Β | β | Beta | Ξ | ξ | Csi |
| Γ | γ | Gamma | Ο | ο | Omicron |
| Δ | δ | Delta | Π | π | Pi |
| Ε | ε | Epsilon | Ρ | ρ | Ro |
| Ζ | ζ | Zeta | Σ | σ, ς | Sigma |
| Η | η | Eta | Τ | τ | Tau |
| Θ | θ | Teta | Υ | υ | Ipsilon |
| Ι | ι | Iota | Φ | φ | Fi |
| Κ | κ | Kappa | Χ | χ | Hi |
| Λ | λ | Lambda | Ψ | ψ | Psi |
| Μ | μ | Miu | Ω | ω | Omega |

Mărimile fundamentale din S.I. și unitățile de măsură corespunzătoare, care aparțin mecanicii, sunt indicate în tabelul de mai jos.

| Mărimea fizică | Simbolul mărimii | Unitatea de măsură | Simbolul unității |
|---|---|---|---|
| Lungimea | $l$ | metru | m |
| Masa | $m$ | kilogram | kg |
| Timpul | $t$ | secundă | s |

Unitățile de măsură ale mărimilor fizice derivate se exprimă în funcție de unitățile de măsură ale mărimilor fundamentale care se folosesc în definirea mărimilor derivate. Mai jos sunt date câteva exemple.

**Aria unui dreptunghi:**

$$A_{dreptunghi} = L \cdot l \quad \Rightarrow \quad [A] = [L] \cdot [l] = m \cdot m = m^2$$

**Volumul unui cub:**

$$V_{cub} = l \cdot l \cdot l = l^3 \quad \Rightarrow \quad [V] = [l]^3 = m^3$$

**Viteza:**

$$v = \frac{d}{t} \quad \Rightarrow \quad [v] = \frac{[d]}{[t]} = \frac{m}{s} = m \cdot s^{-1}$$

**Accelerația:**

$$a = \frac{v}{t} \quad \Rightarrow \quad [a] = \frac{[v]}{[t]} = \frac{m}{s^2} = m \cdot s^{-2}$$

**Densitatea volumică:**

$$\rho = \frac{m}{V} \quad \Rightarrow \quad [\rho] = \frac{[m]}{[V]} = \frac{kg}{m^3} = kg \cdot m^{-3}$$

**Forța (legea a II-a):**

$$F = m \cdot a \quad \Rightarrow \quad [F] = [m] \cdot [a] = kg \cdot \frac{m}{s^2} = N$$

**Forța elastică:**

$$F_{el} = k \cdot \Delta l \quad \Rightarrow \quad k = \frac{F_{el}}{\Delta l} \quad \Rightarrow \quad [k] = \frac{[F]}{[l]} = \frac{N}{m} = N \cdot m^{-1}$$

Este corectă formula de mai jos?

$$F_A = \rho \cdot V_{dez} \cdot g$$

Verificăm unitățile de măsură:

$$[F] = N$$

$$[\rho] \cdot [V] \cdot [a] = \frac{kg}{m^3} \cdot m^3 \cdot \frac{m}{s^2} = kg \cdot \frac{m}{s^2} = N$$

$$\Rightarrow OK!$$

Ati recunoscut formula de mai sus?

**Exercitiul 1:** Este corecta formula

$$d = v + a \cdot t \ ?$$

**Exercitiul 2:** Aflați unitatea de măsură a lui $\gamma$ din formula:

$$F_g = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2}$$

Pentru exprimarea *multiplilor* și *submultiplilo*r unităților de măsură din S.I. se folosesc prefixele din tabelul următor:

| | | | |
|---|---|---|---|
| yotta | Y | $10^{24}$ | 1 000 000 000 000 000 000 000 000 |
| zetta | Z | $10^{21}$ | 1 000 000 000 000 000 000 000 |
| exa | E | $10^{18}$ | 1 000 000 000 000 000 000 |
| peta | P | $10^{15}$ | 1 000 000 000 000 000 |
| tera | T | $10^{12}$ | 1 000 000 000 000 |
| giga | G | $10^{9}$ | 1 000 000 000 |
| mega | M | $10^{6}$ | 1 000 000 |
| kilo | k | $10^{3}$ | 1 000 |
| hecto | h | $10^{2}$ | 100 |
| deca | da | $10^{1}$ | 10 |
| - | - | $10^{0}$ | 1 |
| deci | d | $10^{-1}$ | 0,1 |
| centi | c | $10^{-2}$ | 0,01 |
| mili | m | $10^{-3}$ | 0,001 |
| micro | µ | $10^{-6}$ | 0,000 001 |
| nano | n | $10^{-9}$ | 0,000 000 001 |
| pico | p | $10^{-12}$ | 0,000 000 000 001 |
| femto | f | $10^{-15}$ | 0,000 000 000 000 001 |
| atto | a | $10^{-18}$ | 0,000 000 000 000 000 001 |
| zepto | z | $10^{-21}$ | 0,000 000 000 000 000 000 001 |
| yokto | y | $10^{-24}$ | 0,000 000 000 000 000 000 000 001 |

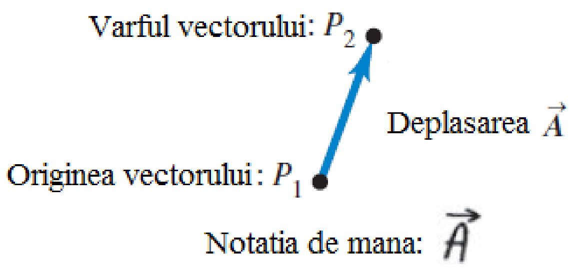
Mai jos sunt prezentate câteva exemple de multiplii și submultiplii ai unităților de lungime, masă şi timp.

| **Lungime** | **Masa** | **Timp** |
|---|---|---|
| 1 nanometru = 1 nm = $10^{-9}$ m | 1 microgram = 1 $\mu$g = $10^{-6}$ g = $10^{-9}$ kg | 1 nanosecunda = 1 ns = $10^{-9}$ s |
| 1 micrometru = 1 $\mu$m = $10^{-6}$ m | 1 milligram = 1 mg = $10^{-3}$ g = $10^{-6}$ kg | 1 microsecunda = 1 $\mu$s = $10^{-6}$ s |
| 1 milimetru = 1 mm = $10^{-3}$ m | 1 gram = 1 g = $10^{-3}$ kg | 1 milisecunda = 1 ms = $10^{-3}$ s |
| 1 centimetru = 1 cm = $10^{-2}$ m | | |
| 1 kilometru = 1 km = $10^{3}$ m | | |

## I.2. Mărimi vectoriale

Mărimile caracterizate doar printr-un număr (pozitiv sau negativ) se numesc *mărimi scalare* sau *scalari*, de exemplu, masa, timpul, temperatura, densitatea. Mărimile caracterizate prin modul (mărime), direcție și sens se numesc *mărimi vectoriale* sau *vectori*, de exemplu, deplasarea, viteza, accelerația, forța.

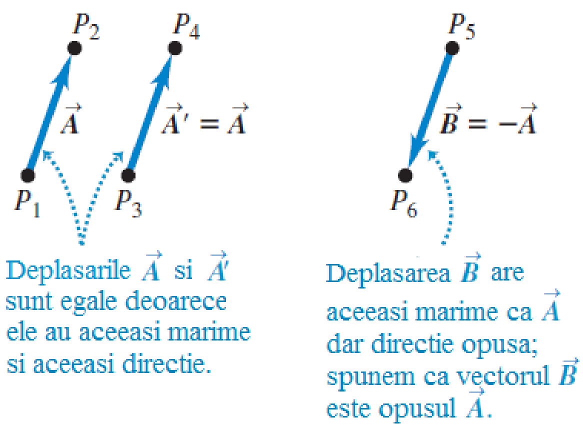
**Reprezentarea grafică a mărimilor vectoriale.** Deoarece au și direcție, mărimile vectoriale sunt reprezentate prin câte un segment orientat numit, simplu, vector, și se notează prin simbolul mărimii respective cu o săgeată deasupra, orientată spre dreapta. De exemplu, deplasarea din punctul $P_1$ în punctul $P_2$ poate fi reprezentată vectorial ca în figura alaturată:



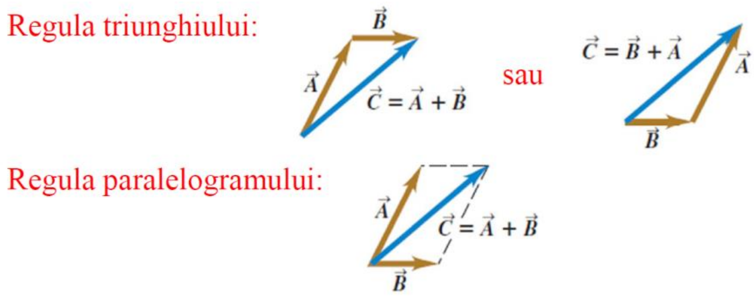

**Mărimea (modulul) unui vector** se exprimă întotdeauna printr-un număr pozitiv și se noteaza astfel:

$$\boxed{\text{Marimea vectorului } \vec{A} = A = |\vec{A}|}$$

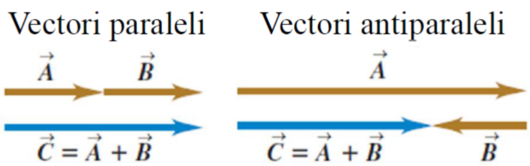
**Vectori paraleli și antiparaleli (opuși):**



**Adunarea grafică a mărimilor vectoriale** se realizează folosind *regula triunghiului* sau *regula paralelogramului* (sunt echivalente).



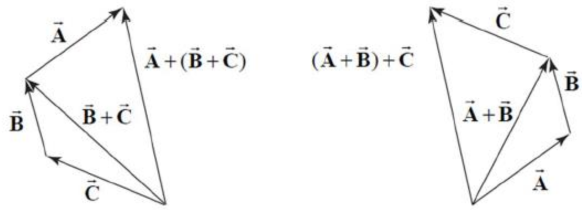

**Caz particular de adunare** a doi vectori (folosind regula triunghiului):




### Proprietățile adunării vectorilor

Adunarea vectorilor este comutativa: $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$

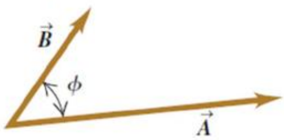
Adunarea vectorilor este asociativa: $(\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}) + \vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} + (\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}})$




Exista un vector nul, $\vec{\mathbf{0}}$ , astfel incat: $\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{0}} = \vec{\mathbf{0}} + \vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{A}}$

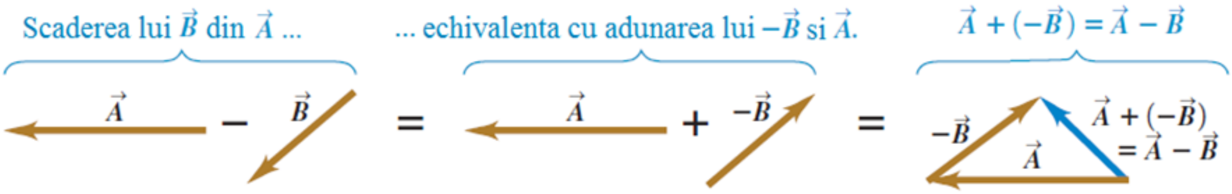
Orice vector $\vec{\mathbf{A}}$ are un invers unic, $-\vec{\mathbf{A}}$ , astfel incat: $\vec{\mathbf{A}} + (-\vec{\mathbf{A}}) = \vec{\mathbf{0}}$

Daca unghiul dintre vectorii $\vec{A}$ si $\vec{B}$ este $\phi$ , rezultanta $\vec{C}$ a acestor vectori are marimea

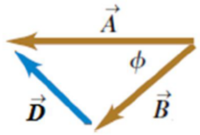



$$C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2A \cdot B \cdot \cos\phi}$$

### Scăderea grafică a mărimilor vectoriale

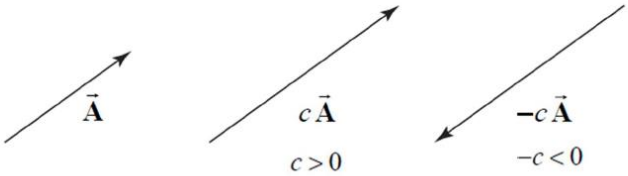


Marimea vectorului diferenta $\vec{D}$ dintre vectorii $\vec{A}$ si $\vec{B}$ este:




$$D = \sqrt{A^2 + B^2 - 2A \cdot B \cdot \cos\phi}$$

**Înmulțirea unui vector cu un scalar.** Un vector $\vec{A}$ poate fi înmulțit cu un număr real *c*, pozitiv sau negativ, și scriem acest lucru $c\vec{A}$. Grafic, semnificația acestei operații este aratată în figura alaturată.




Înmulțirea vectorilor cu scalari are proprietăți de asociativitate și distributivitate, așa cum se arată mai jos.

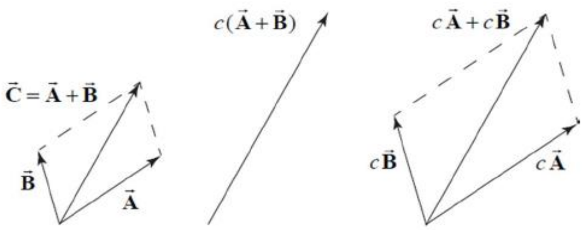
Proprietati de asociativitate:

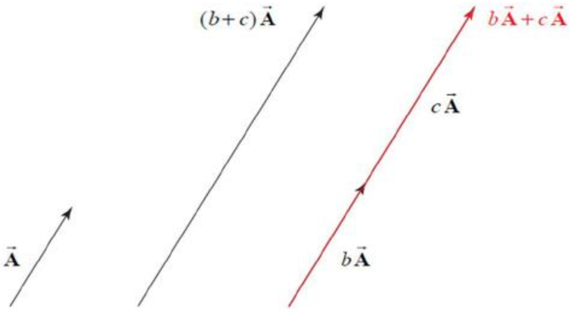
$$b(c\vec{\mathbf{A}}) = (bc)\vec{\mathbf{A}} = (cb\vec{\mathbf{A}}) = c(b\vec{\mathbf{A}})$$

$$c(\vec{\mathbf{A}}+\vec{\mathbf{B}}) = c\vec{\mathbf{A}} + c\vec{\mathbf{B}}$$

Distributivitatea fata de adunarea scalarilor:

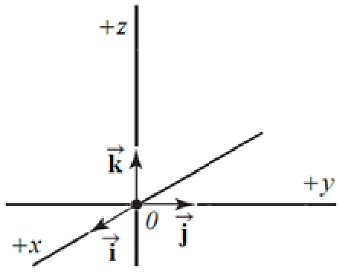
$$(b+c)\vec{\mathbf{A}} = b\vec{\mathbf{A}} + c\vec{\mathbf{A}}$$



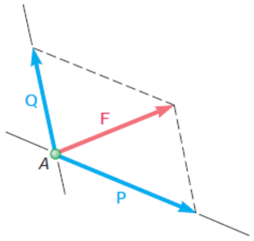

**Vector unitar.** Un vector $\vec{A}$ poate fi împărțit la un scalar pozitiv sau negativ. Un caz particular foarte important este cel în care vectorul $\vec{A}$ este împărțit la mărimea sa, $|\vec{A}|$; în acest caz rezultatul este un vector având mărimea 1, fără unitate de măsură, care indică doar o direcție, și anume direcția vectorului $\vec{A}$. Acest vector de mărime 1 se numeşte *vector unitar* și de multe ori se scrie astfel $\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \vec{e}_{\vec{A}}$. Vectorul unitar este important deoarece orice vector $\vec{B}$, paralel sau antiparalel cu $\vec{A}$, de aceeasi natură sau nu cu $\vec{A}$ se va putea scrie astfel: $\vec{B} = |\vec{B}|\vec{e}_{\vec{A}}$.

Un caz particular de vectori unitari este cel care indică sensul pozitiv pe axele *x*, *y* si *z* ale unui sistem de coordonate carteziene ortogonale. În acest caz, vectorii unitari ai celor trei axe se notează de multe ori cu $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, așa cum se arată în figura alăturată.

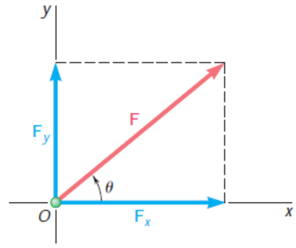


**Descompunerea unui vector după un sistem de axe în plan**

Un vector poate fi descompus după două axe oarecare sau după două axe ortogonale (perpendiculare), așa cum este arătat în figura alăturată.

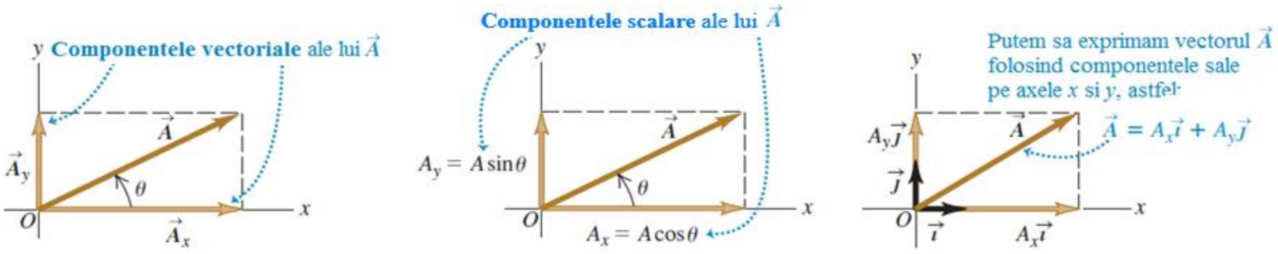



*După două axe oarecare.*




*După două axe ortogonale*

În schema de mai jos sunt arătate relațiile dintre un vector $\vec{A}$ și componentele sale vectoriale și, respectiv, scalare, precum și scrierea vectorului $\vec{A}$ folosind componentele scalare și versorii axelor *x* si *y*.




$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{A_y}{A_x}$$

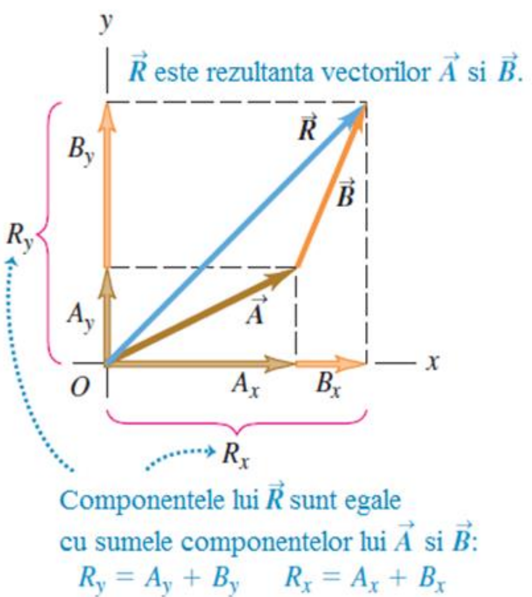
$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{A_y}{A_x}$$

$$\vec{A}_x = A_x\vec{i}$$

$$\vec{A}_y = A_y\vec{j}$$

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j}$$

Adunarea vectorilor dacă se cunosc componentele ortogonale se realizează conform schemei de mai jos.




$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j}$$

$$\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j}$$

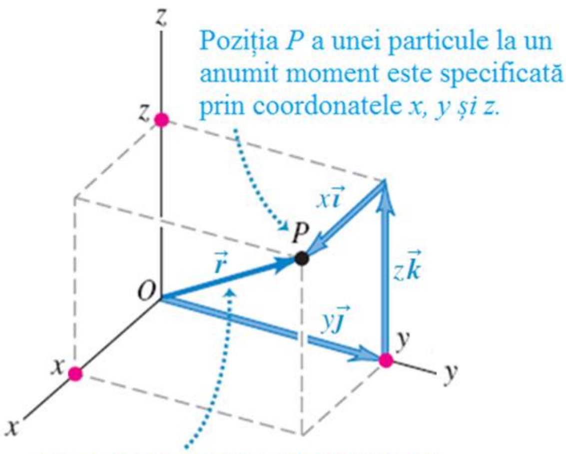
$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$$

$$= (A_x\vec{i} + A_y\hat{j}) + (B_x\vec{i} + B_y\vec{j})$$

$$= (A_x + B_x)\vec{i} + (A_y + B_y)\vec{j}$$

$$= R_x\vec{i} + R_y\vec{j}$$

**Vectorul de poziție.** Un vector foarte important în fizică este vectorul de poziție care specifică poziția unui punct pe o dreaptă, într-un plan sau în spațiu. Acest vector se notează de obicei cu $\vec{r}$. În figura alăturată este arătat vectorul de poziție al unui punct *P* din spațiu și cum se scrie el cu ajutorul componentelor sale carteziene.




Vectorul de poziție al punctului *P* are componentele *x*, *y* și *z*:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

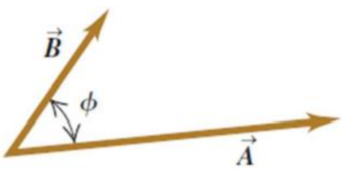
**Produsul scalar a doi vectori.** Regulile de înmulțire a vectorilor sunt complet diferite de regulile de înmulțire a mărimilor scalare. Se pot defini două feluri de produse a doi vectori:

a) *produsul scalar*, al cărui rezultat este o mărime scalară;

b) *produsul vectorial*, al cărui rezultat este o mărime vectorială.

Mai jos sunt schematizate regulile de bază referitoare la produsul scalar a doi vectori. Produsul vectorial nu este folosit în temele din programa de bacalaureat.

Fie vectorii din figura:




Produsul lor scalar se defineste astfel:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\phi = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\phi$$

iar rezultatul este, evident, un scalar.

Produsul scalar este comutativ:

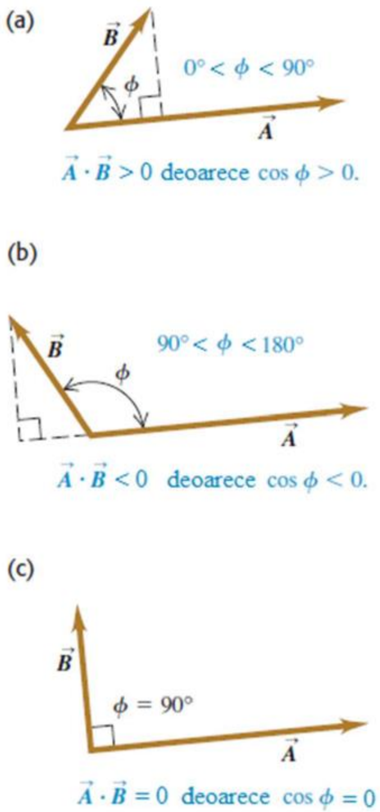
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

Unghiul dintre vectori se poate afla astfel:

$$\cos\phi = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB}$$

Modulul (marimea) unui vector:

$$|\mathbf{A}| = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A})^{1/2}$$




Adresă poștală: Bd. Vasile Pârvan nr. 4, cod poștal 300223, Timișoara, jud. Timiș, România
Număr de telefon: +40-(0)256-592.697
Adresă de e-mail: edu@e-uvt.ro
Website: www.uvt.ro

## I.3. Elemente de cinematica punctului material

Cinematica studiază mişcarea corpurilor în spatiu şi în timp, făcând abstracţie de cauzele mişcării. Dinamica studiază mişcarea corpurilor luând în considerare şi forţele care produc mişcarea. Statica studiază echilibrul corpurilor ţinând cont de forţele care acţionează asupra corpurilor. Mecanica studiază mişcarea şi echilibrul punctelor materiale, a corpurilor rigide şi a corpurilor deformabile (solide, lichide sau gazoase). Programa de bacalaureat se referă doar la câteva elemente de mecanica *punctului material*. Un corp poate fi considerat punct material dacă dimensiunile sale sunt neglijabile faţă de distanţele de la corpul respectiv până la alte corpuri înconjuratoare, cu care el poate interacţiona sau nu.

Elementele cinematice ale mişcării punctului material sunt:

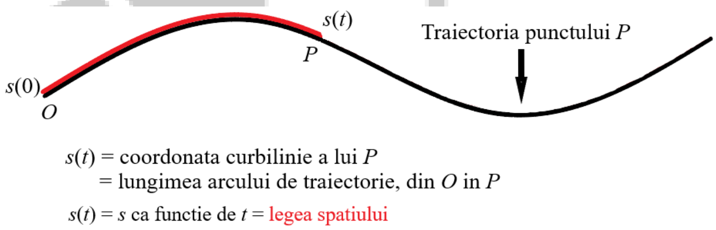
- poziţia punctului material (→ sisteme de coordonate);
- traiectoria punctului material (locul geometric al poziţiilor succesive ale punctului material);
- viteza si acceleratia punctului material.

Deplasarea unui corp are loc şi este descrisă în raport cu alte corpuri. Mişcarea este relativă! De aceea, pentru studierea mişcării unui corp este nevoie sa se aleagă:

- un corp de referinţă;
- un sistem de coordonate;
- un instrument pentru măsurarea timpului.

Sistemul de coordonate + instrumentul pentru măsurarea timpului formează un *sistem de referinţă*. Descrierea mişcării punctului material se poate face în trei moduri:

**a) Modul natural:** Se indică lungimea arcului de traiectorie faţă de un punct ales arbitrar ca origine, adică $s_P = s(t)$.




**b) Modul analitic** (cu ajutorul coordonatelor): Pozitia lui *P* la orice moment *t* este dată de ecuaţiile cinematice ale mişcării,

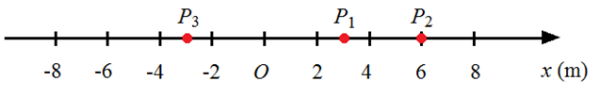
$$x_P = x(t)$$
$$y_P = y(t)$$
$$z_P = z(t)$$

care reprezintă şi *ecuaţiile parametrice ale traiectoriei*.

**c) Modul vectorial:** Se indică modul în care depinde de timp vectorul de poziţie al punctului *P*, adică $\vec{r}_P = \vec{r}(t)$. Vârful vectorului de poziţie descrie traiectoria punctului *P*.

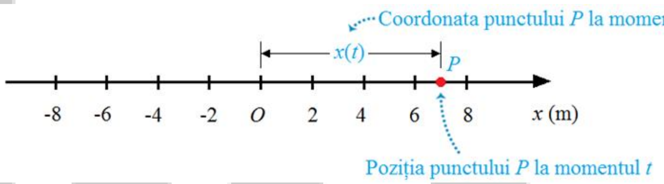
### Deplasarea, durata mişcării şi viteza în mişcarea rectilinie

Din punct de vedere geometric, cea mai simplă mişcare a unui *punct material* este cea care se desfăşoară pe o dreaptă (*mişcare rectilinie*, *unidimensională* sau 1D). Pentru a descrie poziţia punctului material în fiecare moment alegem pe dreapta respectivă un punct origine *O* şi un sens pozitiv. Dreapta astfel orientată o putem numi, de exemplu, *Ox*, dar la fel de bine putem să o numim și *Oy* sau *Oz*, în cazul de față alegem să o numim *Ox*. Coordonata *x* a punctului material este distanța de la originea *O* până la acesta, cu semnul plus (+) sau minus (-), după cum el se află în partea pozitivă sau în partea negativă a axei *Ox*.

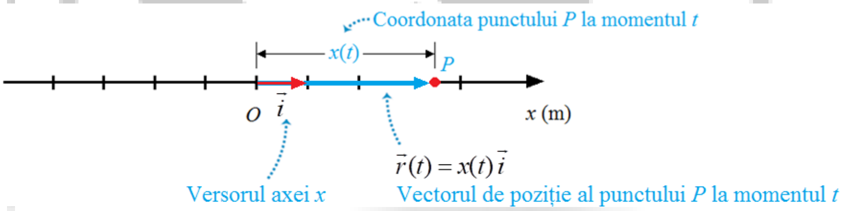



Coordonata punctului $P_1 = x_1 = 3$ m
Coordonata punctului $P_2 = x_2 = 6$ m
Coordonata punctului $P_3 = x_3 = -3$ m

În cazul în care un punct material se mișcă pe axa *x*, coordonata punctului se modifică în timp sau, cu alte cuvinte, coordonata *x* este funcție de timp: $x = x(t)$.




Poziția punctului *P* pe axa *x* poate fi specificată și cu ajutorul vectorului de poziție, care în acest caz, are o singură componentă: $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i}$

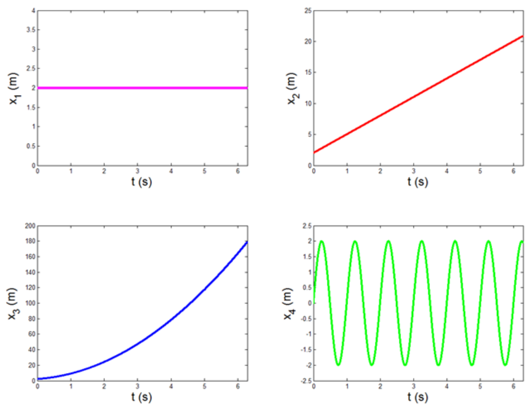



Dependența de timp a coordonatei unui punct material se poate reprezenta grafic; această reprezentare se numește *graficul mișcării* sau *graficul x(t)*. Atenție: **GRAFICUL MIȘCĂRII ≠ TRAIECTORIE !**

**Exemple**: Patru particule se mișcă de-a lungul axei x astfel:

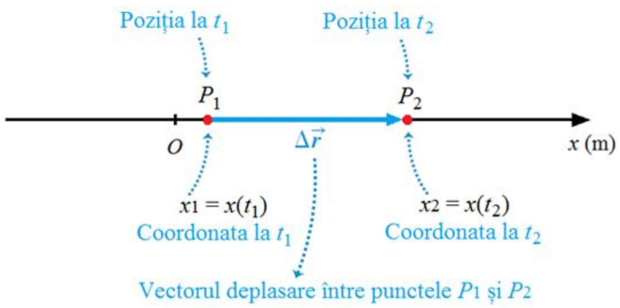
$x_1(t) = 2$ (m)
$x_2(t) = 2 + 3t$ (m)
$x_3(t) = 2 + 3t + 4t^2$ (m)
$x_4(t) = 2\sin(2\pi t)$ (m).

Traiectoriile sunt rectilinii dar graficele mișcărilor pot fi curbe complicate.



Graficele mișcărilor

**Viteza medie.** Pentru a defini viteza medie în mişcarea rectilinie folosim figura de mai jos.




Vom avea:

$$\Delta x = x_2 - x_1 \quad \text{(deplasarea / mărimea deplasării)}$$
$$\Delta t = t_2 - t_1 \quad \text{(durata mişcării)} \qquad (3.1)$$
$$\Delta\vec{r} = \Delta x \vec{i} \quad \text{(vectorul deplasare)}$$

Prin definiție, *viteza medie* în mişcarea rectilinie de-a lungul axei $x$ este

$$v_{med,x} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (3.2)$$

Cu alte cuvinte, viteza descrie cât de repede se modifică poziția (coordonata) unui corp în unitatea de timp. Unitatea de măsură a vitezei în S.I. este m/s. În practică se mai foloseşte şi km/h.

**Viteza momentană (instantanee).** Viteza medie depinde doar de mărimea deplasării $\Delta x$ care se efectuează în intervalul de timp $\Delta t$, nu şi de ceea ce se întâmplă pe parcusul mişcării. Pentru a-i afla viteza în punctul $P1$ mutăm punctul $P2$ din ce în ce mai aproape de $P1$ şi calculăm viteza medie pentru distanțe $\Delta x$ şi intervale de timp $\Delta t$ din ce în ce mai mici. Cu toate că $\Delta x$ şi $\Delta t$ vor avea amândouă valori din ce în ce mai mici, nu este obligatoriu ca şi raportul lor să devină foarte mic.

*Viteza momentană (instantanee)* a unui corp se defineşte ca valoarea limită a vitezei medii pentru intervale de timp $\Delta t$ care tind către zero.
În cazul mişcării rectilinii de-a lungul axei $x$ scriem:

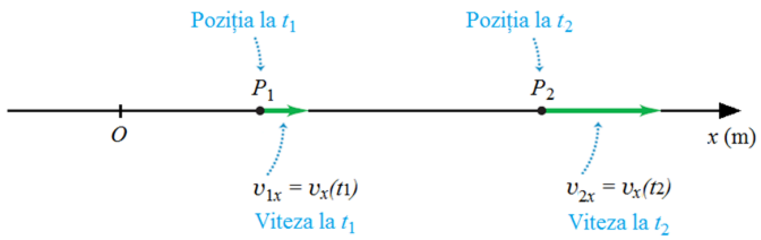
$$\upsilon_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \qquad (3.3)$$

unde: $\upsilon_x$ = viteza momentană (componenta vitezei în direcția $x$)

$\frac{dx}{dt}$ = derivata funcției $x(t)$ în raport cu timpul.

Adresă poştală: Bd. Vasile Pârvan nr. 4, cod poştal 300223, Timişoara, jud. Timiş, România
Număr de telefon: +40-(0)256-592.697
Adresă de e-mail: edu@e-uvt.ro
Website: www.uvt.ro

**Acceleratia medie.** Așa cum viteza descrie cât de repede se modifică poziția unui corp în unitatea de timp, *accelerația* descrie cât de repede se modifică viteza în unitatea de timp.




Vom avea:

$$\Delta\upsilon_x = \upsilon_{2x} - \upsilon_{1x} \quad \text{(modificarea / variația vitezei)}$$
$$\Delta t = t_2 - t_1 \quad \text{(durata mișcării)} \tag{3.4}$$

Prin definiție, *accelerația medie* în mișcarea rectilinie de-a lungul axei $x$ este

$$a_{med,x} = \frac{\upsilon_{2x} - \upsilon_{1x}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\upsilon_x}{\Delta t} \tag{3.5}$$

Unitatea de măsură a accelerației în S.I. este m/s$^2$.

**Accelerația momentană (instantanee).**

Accelerația momentană (instantanee) a unui corp se definește ca valoarea limită a accelerației medii pentru intervale de timp $\Delta t$ care tind către zero.
În cazul mișcării rectilinii de-a lungul axei $x$ scriem:

$$a_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\upsilon_x}{\Delta t} = \frac{d\upsilon_x}{dt} \tag{3.6}$$

unde: $a_x$ = accelerația momentană (componenta accelerației în direcția $x$)

$\frac{d\upsilon_x}{dt}$ = derivata funcției $\upsilon_x(t)$ în raport cu timpul.

Deoarece $\upsilon_x = dx/dt$, accelerația mai poate fi scrisă

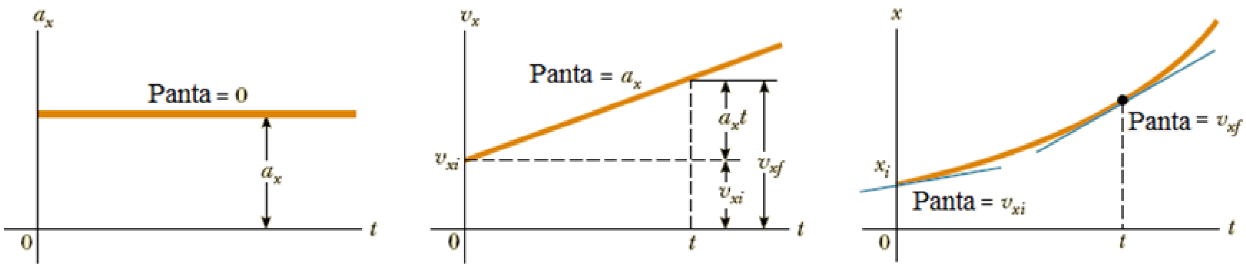
$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

În mișcarea de-a lungul axei $x$ accelerația este dată de *derivata a doua* (sau *secundă*) a coordonatei $x$ în raport cu timpul.

**Mișcarea rectilinie cu accelerație constantă (uniform variată).** Exemple: căderea unui corp în apropierea Pământului, în absența frecării cu aerul; alunecarea unui corp pe un plan înclinat, cu sau fără frecare între corp și plan. Legile mișcării rectilinii uniform variate sunt urmatoarele:

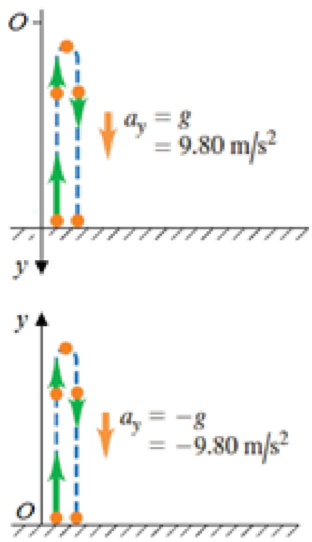
| Ecuația | Mărimi în ecuație | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $v_x = v_{0x} + a_x t$ | $t$ | | $v_x$ | $a_x$ | ***Legea vitezei: v(t)*** |
| $x = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$ | $t$ | $x$ | | $a_x$ | ***Legea spatiului: x(t)*** |
| $v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x (x - x_0)$ | | $x$ | $v_x$ | $a_x$ | ***Formula lui Galilei*** |
| $x - x_0 = \left(\frac{v_{0x} + v_x}{2}\right)t$ | $t$ | $x$ | $v_x$ | | ***Legea spatiului cu viteza medie*** |

În unele probleme sunt utile și reprezentările grafice ale lui $a_x(t)$, $v_x(t)$ și $x(t)$ de mai jos.




(a) (b) (c)

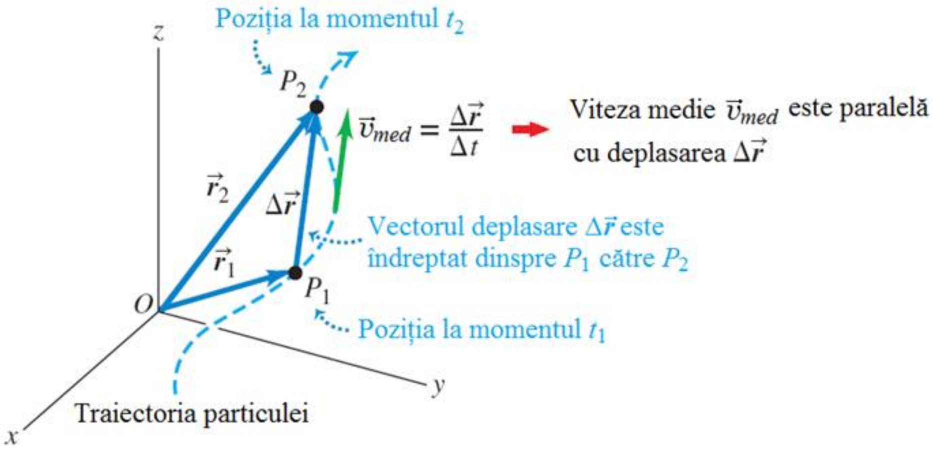
**Căderea liberă**. Cel mai simplu exemplu de mișcare rectilinie care se desfășoară cu o accelerație aproximativ constantă este căderea unui corp în apropierea suprafeței Pământului, sub acțiunea atracției gravitaționale a acestuia. În căderea liberă a unui corp nu se ia în considerare frecarea cu aerul și se consideră că accelerația datorată atracției gravitaționale este constantă. Mărimea accelerației gravitaționale pe care Pământul o exercită asupra corpului se notează cu *g*. Accelerația gravitațională este îndreptată întotdeauna în jos (către centrul Pământului). În funcție de alegerea sensului pozitiv a axei verticale, valoarea accelerației în caderea liberă se ia +9,80 m/s$^2$ sau -9,80 m/s$^2$.




Legile căderii libere sunt particularizări ale legilor generale ale mişcării rectilinii uniform variate, punând accelerația +*g* sau –*g*.

**I.4. Deplasarea, durata mişcării şi viteza în mişcarea curbilinie (2D si 3D).**

**Vectorul viteză la mişcarea curbilinie.** De data aceasta trebuie să folosim o reprezentare vectorială în plan sau în spațiu. Pentru definirea vitezei medii reprezentarea este cea din figura alăturată.




Vom avea:

$$\vec{r}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$$

$$\vec{r}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$

$$\Rightarrow \Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

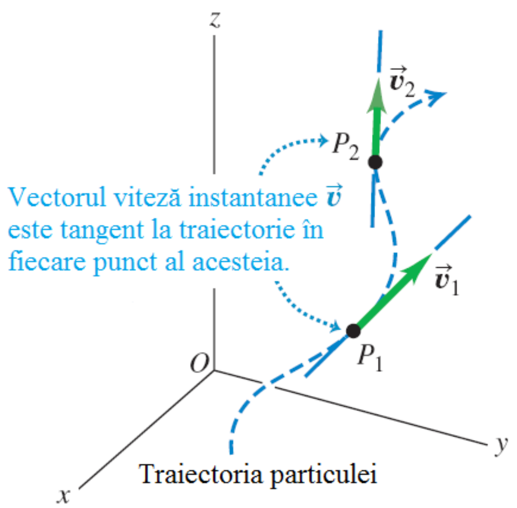
Vectorul viteză medie pentru o traiectorie oarecare în spațiu:

$$\vec{v}_{med} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Componentele carteziene ale vitezei medii:

$$v_{med,x} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\ ;\ v_{med,y} = \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta y}{\Delta t}\ ;\ v_{med,z} = \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

Pentru definirea vitezei momentane vom avea:




Vectorul viteză instantanee:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Componentele carteziene ale vitezei instantanee:

$$v_x = \frac{dx}{dt}\ ;\ v_y = \frac{dy}{dt}\ ;\ v_z = \frac{dz}{dt}$$

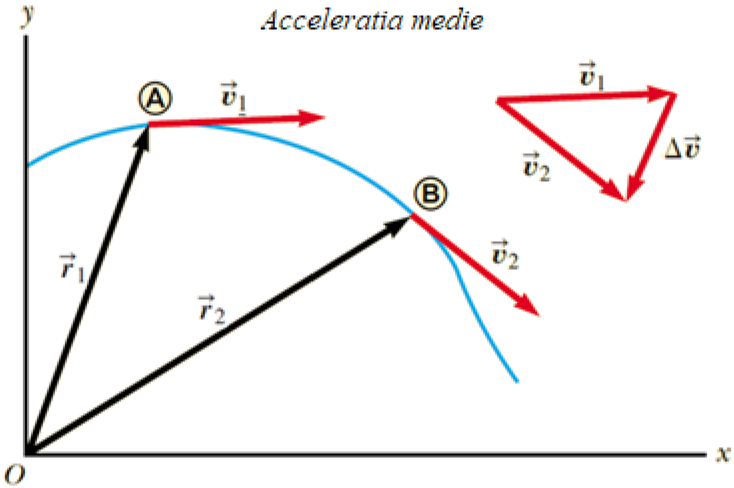
Vectorul viteză instantanee scris cu ajutorul componentelor carteziene:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

Mărimea vitezei instantanee:

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

**Vectorul accelerație la mişcarea curbilinie.**




$$\boxed{\vec{a}_{\text{med}} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}}$$

*Acceleratia momentana*

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

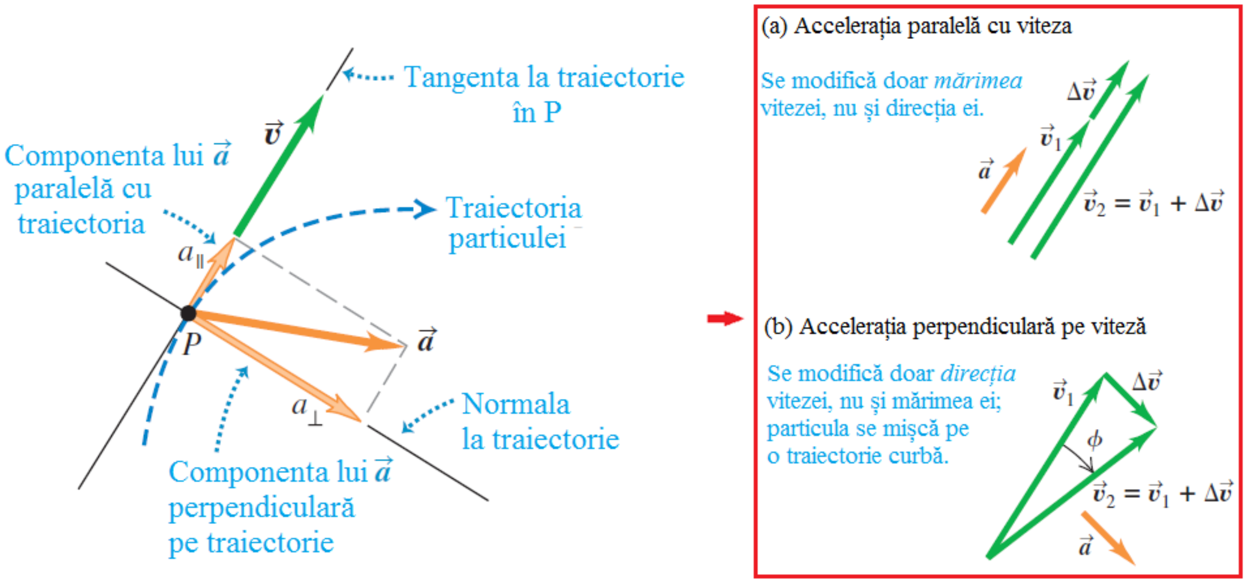
$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} \qquad a_z = \frac{dv_z}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k}$$

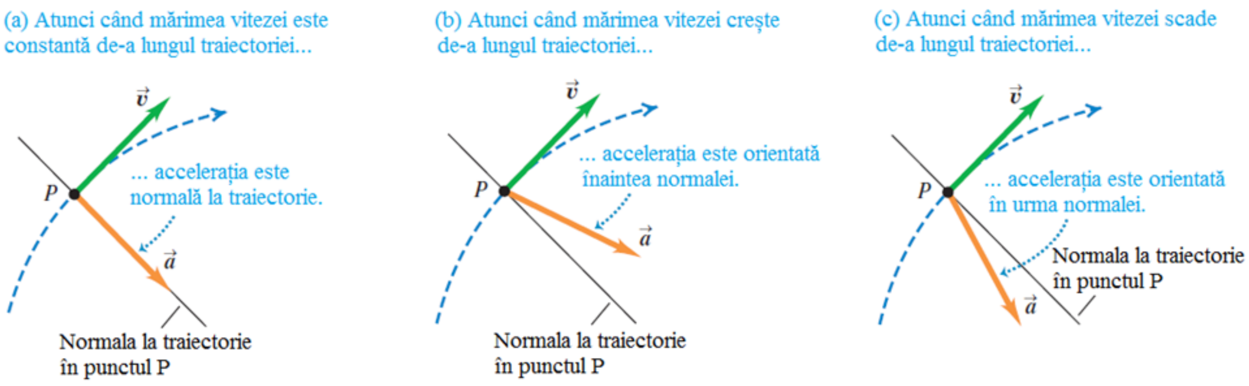
$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} \qquad a_z = \frac{d^2z}{dt^2}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

**Componentele paralelă (tangențială) și perpendiculară (radială sau normală) ale accelerației.** În general, vectorul accelerație nu este tangentă la traiectorie, așa cum este vectorul viteză, ci are atât o componentă tangentă la traiectorie cât și o componentă normală la traiectorie. Cele două componente ale vectorului accelerație au efecte diferite, așa cum se arată mai jos.




În funcție de direcția componentei normale a accelerației față de normala la traiectorie modulul vitezei poate rămâne constant, poate să crească sau poate să scadă.




## I.4. Principiile mecanicii newtoniene

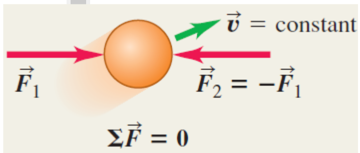
Mecanica clasică, elaborată în esență de Isaac Newton, se bazează pe trei legi foarte generale, numite *principii*. Separat de aceste principii Newton a formulat principiul independenței acțiunii forțelor. Toate celelalte legi ale mecanicii newtoniene se deduc din aceste principii, ca *teoreme*. Formularea principiilor mecanicii newtoniene ține cont de următoarele ipoteze:

a) spațiul și timpul sunt absolute;

b) masa este independentă de viteză;

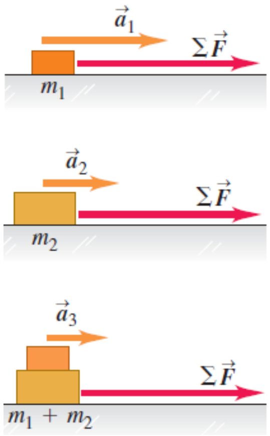
c) masa unui sistem de corpuri închis este independentă de procesele interne din acel sistem (masa nu se creează și nu dispare).

**Principiul inerției (principiul întâi)**. A fost descoperit de Galilei (1632) și formulat de Newton (1686): *Un punct material își menține starea de repaus sau de mișcare rectilinie uniformă atât timp cât asupra sa nu acționează alte corpuri care să-i schimbe această stare de mișcare.*




Proprietatea corpurilor de a-și menține starea de repaus sau de mișcare rectilinie uniformă, în absența acțiunilor exterioare, respectiv de a se opune la orice acțiune exterioară care încearcă să le schimbe starea de repaus sau de mișcare rectilinie uniformă se numește *inerție*. O măsură a inerției este *masa*. Sistemele de referință în care este valabil principiul inerției se numesc *sisteme de referință inerțiale*. Principiile mecanicii newtoniene sunt valabile în sistemele de referință inerțiale.

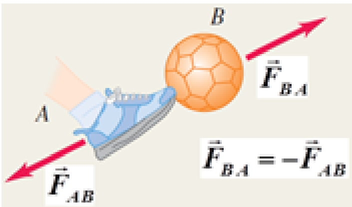
**Principiul fundamental (principiul al doilea, al forței).** Corpurile care interacționează exercită unul asupra celuilalt câte o *forță*. O forță aplicată unui corp poate modifica mărimea și direcția vitezei corpului, adică îi imprimă o *accelerație*. *Principiul al doilea stabilește proporționalitatea directă între accelerație și forța care a produs*-o, *accelerația și forța fiind vectori care au aceeași direcție și același sens*: $\vec{a} = \vec{F}/m$. În această ecuație a principiului al doilea $m$ este masa corpului. Principiul al doilea, scris sub forma $\vec{a} = \vec{F}/m$, reprezintă o relație cauzală care arată cum efectul ($\vec{a}$) depinde de cauză ($\vec{F}$). Dacă se cunosc masa și accelerația se poate determina forța care a produs accelerația: $\vec{F} = m\vec{a}$.



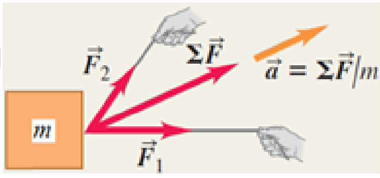

În ecuațiile de mai sus nu se spune nimic despre natura forței: ea poate fi de natură gravitațională, electrică, elastică, de frecare, etc. De aceea, pentru determinarea mișcării unui corp trebuie cunoscută și *legea forței* (de exemplu, legea atracției gravitaționale, legea interacțiunii electrice, legea lui Hooke, etc).

Definind impulsul punctului material ca $\vec{p} = m\vec{v}$ rezultă că forța este egală cu viteza de variație a impulsului punctului material: $\vec{F} = d\vec{p}/dt$. În mecanica clasică, relațiile $\vec{F} = m\vec{a}$ și $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ scrise pentru un punct material sunt echivalente.

**Principiul acțiunii și reacțiunii (principiul al treilea).** Enunțul principiului este următorul: *Dacă un corp acționează asupra altui corp cu o forță, numită acțiune, cel de-al doilea corp acționează asupra primului cu o forță egală în modul și de sens opus, numită reacțiune*. Cele două forțe, acțiunea și reacțiunea, sunt aplicate unor corpuri *diferite* și acționează *simultan*. Mai trebuie menționat faptul că acest principiu se aplică în mecanică atât în cazul contactului direct dintre corpuri, cât și în cazul acțiunilor „la distanță” (de exemplu, în cazul atracției gravitaționale).




**Principiul independenței acțiunii forțelor.** Enunțul principiului este următorul: *Dacă asupra unui punct material acționează simultan mai multe forțe, accelerația imprimată punctului material este egală cu suma vectorială a accelerațiilor pe care le-ar avea punctul material sub acțiunea separată a fiecărei forțe*:



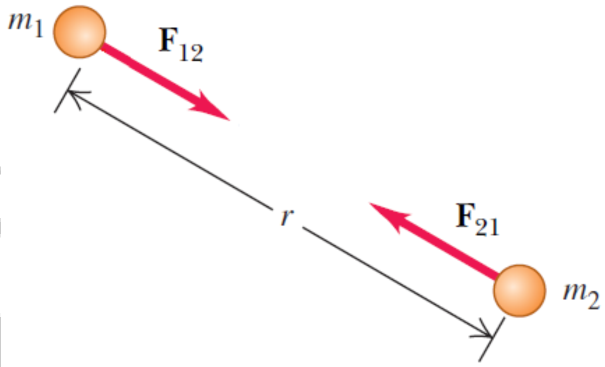

$$\vec{a} = \sum_i \vec{a}_i = \sum_i (\vec{F}_i / m) = \vec{F}/m \text{, unde } \vec{F} = \sum_i \vec{F}_i \ .$$

Adresă poștală: Bd. Vasile Pârvan nr. 4, cod poștal 300223, Timișoara, jud. Timiș, România
Număr de telefon: +40-(0)256-592.697
Adresă de e-mail: edu@e-uvt.ro
Website: www.uvt.ro

## I.5. Tipuri de forte

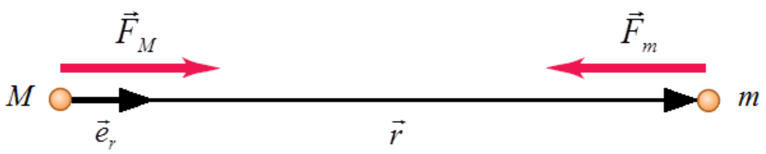
**Forța de atracție gravitațională.** Se obișnuiește să se spună că interacțiunile dintre corpuri se realizează fie prin contactul lor direct, fie prin intermediul unui câmp fizic (sau „interacțiune la distanță”). Interacțiunea gravitațională dintre două corpuri se realizează prin intermediul câmpului gravitațional, a cărui definiție o vom da puțin mai târziu. În secțiunea de față ne vom referi la legea atracției gravitaționale. Aceasta a fost enunțată de către Newton în 1666 (când avea doar 23 de ani!) în felul următor:

*Oricare două corpuri din Univers se atrag cu o forță a cărei mărime este direct proporțională cu masele corpurilor și invers proporțională cu pătratul distanței dintre ele; această forță este dirijată de-a lungul liniei care unește corpurile.*




Formularea de mai sus este puțin ambiguă dacă dorim să discutăm despre corpuri care au o anumită extindere spațială deoarece, în cazul acestora, nu este foarte clar ce înseamnă distanța dintre corpuri și linia care le unește. De aceea, pentru a elimina orice confuzie, în enunțul de mai sus al legii atracției gravitaționale se mai precizează că cele două corpuri sunt *punctiforme*. Acest lucru înseamnă că dimensiunile corpurilor care se atrag sunt mult mai mici decât distanța dintre ele. Deoarece atracția gravitațională se exercită între oricare două corpuri din Univers ea a mai fost numită și *atracție universală*.

Pentru a scrie în formă matematică legea atracției gravitaționale facem referire la figura de mai jos. Între corpurile punctiforme având masele $M$ și $m$ se exercită atracția gravitațională, astfel încât forța care acționează asupra corpului $m$ este $\vec{F}_m$ iar forța care acționează asupra corpului $M$ este $\vec{F}_M$ .




Conform principiului acțiunii și reacțiunii, cele două forțe au mărimi egale și sensuri opuse, adică

$$\vec{F}_M = -\vec{F}_m .$$

Dacă alegem punctul în care se află corpul $M$ ca origine, poziția corpului $m$ poate fi specificată prin vectorul $\vec{r}$ . Definind vectorul unitar $\vec{e}_r = \dfrac{\vec{r}}{r}$, forța gravitațională care acționează asupra corpului $m$ din partea corpului $M$ se poate scrie sub una din formele

$$\vec{F}_m = -\gamma \frac{Mm}{r^2}\vec{e}_r = -\gamma \frac{Mm}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = -\gamma \frac{Mm}{r^3}\vec{r}\,;$$

semnul minus arată că forța exercitată asupra lui *m* este îndreptată către *M*, deci este o forță de atracție. Constanta de proporționalitate $\gamma$ este numită *constantă gravitațională* și valoarea ei a fost determinată experimental pentru prima dată de către fizicianul englez Henry Cavendish în anul 1798, folosind o balanță de torsiune. Valoarea acceptată a constantei gravitaționale este $\gamma = 6{,}673 \pm 0{,}010 \times 10^{-11}$ N m$^2$/kg$^2$. (Mulți autori notează constanta gravitațională cu *G*; am optat pentru utilizarea notației $\gamma$ pentru a elimina orice confuzie cu mărimea greutății unui corp, pe care o notăm întotdeauna cu *G*.)

Am definit greutatea *G* a unui corp ca fiind forța cu care Pământul atrage corpul respectiv și am scris $G = mg$ , unde *g* este accelerația gravitațională, adică accelerația cu care se mișcă corpul dacă este lăsat să cadă liber către Pământ. Presupunem că Pământul este o sferă omogenă având raza $R_P$ și masa $M_P$. Mărimea forței gravitaționale sau a greutății *G* pe care el o exercită asupra unui mic corp cu masa *m*, situat la <u>suprafața</u> acestuia, este:

$$G = F = \gamma \frac{M_P m}{R_P^2}$$

de unde rezultă că accelerația gravitațională va fi:

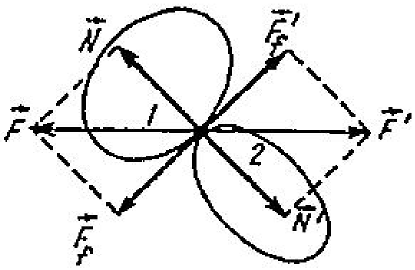
$$g = \frac{\gamma M_P}{R_P^2}$$

Se observă ca mărimea accelerației gravitaționale este <u>*independentă*</u> de masa corpului. Dacă presupunem că corpul *m* se află la <u>înălțimea *h*</u> față de suprafața Pământului rezultă:

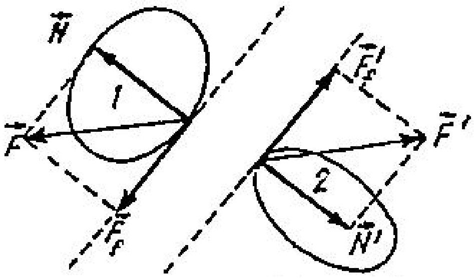
$$G = mg' = \gamma \frac{M_P m}{(R_P + h)^2} \quad \Rightarrow \quad g' = \frac{\gamma M_P}{(R_P + h)^2}\ ,$$

deci mărimea accelerației gravitaționale <u>*scade*</u> atunci când altitudinea la care se află corpul <u>*crește*</u>.

**Forțe de contact.** La contactul oricăror două corpuri apar întotdeauna două forțe, egale în modul și de sensuri opuse: acțiunea unui corp asupra celuilalt și reacțiunea celui de al doilea asupra primului (vezi figura de mai jos).



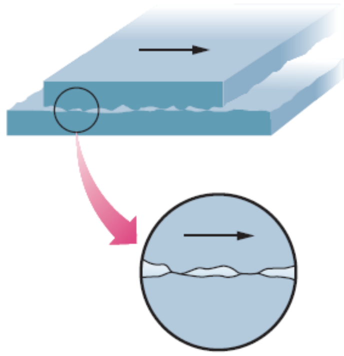

$\vec{F} = -\vec{F}'$




$\vec{N} = -\vec{N}'$ $\vec{F}_f = -\vec{F}_f'$

Cele două forțe sunt rezultatul deformării reciproce a corpurilor și a frecării dintre corpuri la suprafața de contact. Prin deformarea reciprocă iau naștere *forțe elastice normale* (perpendiculare) pe suprafața de contact. Prin frecare, între corpuri apar *forțe tangențiale* care sunt conținute în planul de contact.

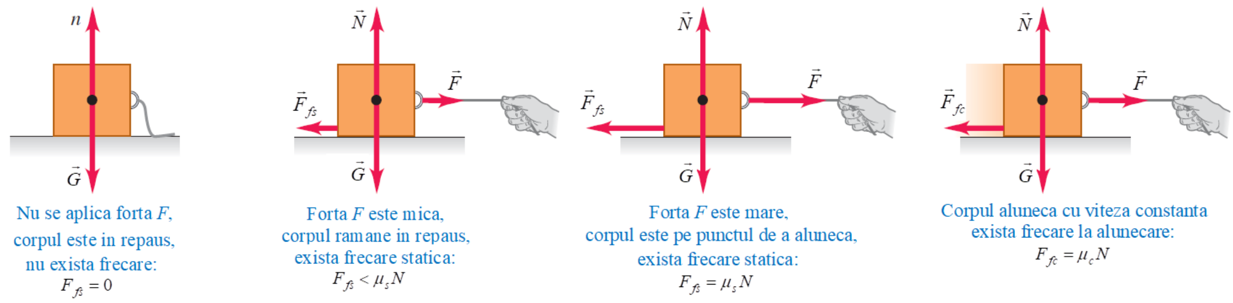
**Forța de frecare între două corpuri solide.** Dacă două corpuri solide sunt în contact, între ele pot să apară forțe de frecare atunci când cele două corpuri tind să se miște sau chiar se miscă unul față de altul. Aceste forțe se datorează întrepătrunderii asperităților celor două suprafețe care sunt în contact. La nivel microscopic, în punctele de contact dintre cele două suprafețe se exercită forțe de atracție sau de respingere între molecule și de aici rezultă apariția forțelor de frecare.



În planul de contact dintre cele două corpuri există bineînțeles două forțe de frecare, acțiunea și reacțiunea, egale în modul și de sensuri opuse. Una acționează asupra unui corp, iar cealaltă acționează asupra celuilalt corp. Forța de frecare care acționează asupra unui corp este paralelă cu planul de contact dintre corpuri iar sensul ei este opus direcției de mișcare a corpului asupra căruia acționează sau opus sensului în care corpul încearcă să se miște. Este important de subliniat faptul că forțele de frecare pot să apară:

a) înainte de a începe alunecarea, caz în care ele se numesc *forțe de frecare statică* sau *de aderență* ($F_{fs}$);

b) atunci când un corp se mișcă față de altul, caz în care ele se numesc *forțe de frecare cinetică* sau de *frecare la alunecare* ($F_{fc}$).




Să presupunem că un corp este așezat pe un plan orizontal și asupra lui acționează o forță $F$ orizontală, care încearcă să deplaseze corpul. S-a constatat experimental că pentru o pereche de materiale din care sunt confecționate corpul și planul orizontal (lemn-lemn, lemn-Al, Al-Fe, etc) există o valoare maximă a forței $F$ până la care corpul rămâne în repaus și că $F_{fs,\max} = \mu_s N$ , unde $N$ este reacțiunea normală iar $\mu_s$ se numește *coeficient de frecare statică*. Dacă $F > \mu_s N$ corpul se mișcă și se constată că forța de tracțiune scade brusc, adică este nevoie de o forță de tracțiune mai mică pentru a menține corpul în mișcare rectilinie uniformă decât pentru a-l scoate din starea de repaus. De data aceasta se poate scrie $F_{fc} = \mu_c N$ , unde $\mu_c$ se numește *coeficient de frecare cinetică* sau *coeficient de frecare la alunecare*, iar $\mu_c < \mu_s$.

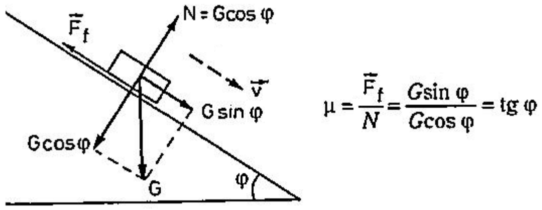
***<u>Legile frecării</u>*** au fost descoperite de către Leonardo da Vinci dar poartă numele fizicianului francez Charles-Augustin de Coulomb.

I. $F_{fs}$ si $F_{fc}$ nu depind de aria suprafețelor de contact dintre corpuri;

II. $F_{fs}$ si $F_{fc}$ sunt direct proporționale cu $N$;

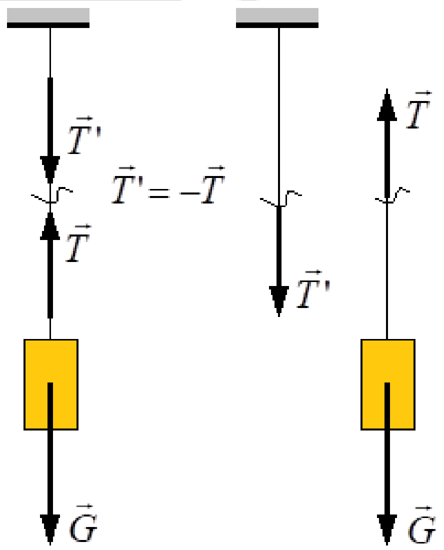
III. $\mu_s$ si $\mu_c$ depind de natura suprafețelor care vin în contact și de gradul de prelucrare al acestora;

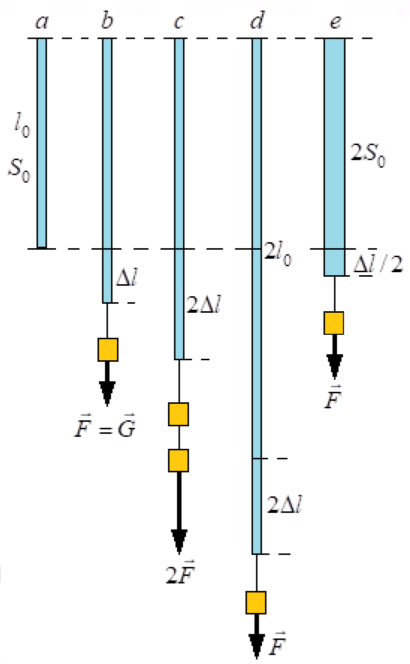
IV. $\mu_c$ este independent de viteză.




***<u>Unghiul de frecare</u>*** $\varphi$ este unghiul unui plan înclinat pentru care un corp coboară uniform pe acesta, cu alte cuvinte $\mu = \mathrm{tg}\varphi$.

**Tensiunea într-un fir (cablu, tijă).** În orice secțiune a unui fir (sau cablu) întins de o forță (de exemplu, de către greutatea unui corp atârnat de capătul firului) sau în orice secțiune a unei bare (tije), întinse sau comprimate, acționează două forțe egale în modul și de sensuri opuse (acțiunea și reacțiunea), cu care o parte a firului (tijei) acționează asupra celeilalte părți. Oricare dintre aceste două forțe se numește tensiune elastică în fir (tija). Dacă firul nu are masă, așa cum se presupune în multe probleme, tensiunea din fir în orice secțiune a sa va fi aceeași (egală cu greutatea corpului atârnat la capătul firului, de exemplu): $T = T' = G$.






**Deformări elastice. Legea lui Hooke.** Să presupunem că avem un fir cilindric (metalic sau din cauciuc, de exemplu) de lungime $l_0$ și secțiune transversală $S_0$, suspendat vertical de capătul superior (vezi figura). De capătul inferior al firului se suspendă corpuri identice cu masa cunoscută. Sub acțiunea greutății corpurilor suspendate lungimea firului devine $l$. Dacă greutatea corpurilor suspendate nu depășește o anumită limită, la desprinderea lor firul revine la lungimea inițială $l_0$. Se spune că firul a suferit o *deformație elastică,* iar dacă firul nu mai revine la lungimea inițială, atunci se spune că el a suferit o *deformație plastică*.

Diferența $l - l_0 = \Delta l$ se numește *alungire absolută*. Dacă se efectuează experimentul cu fire având lungimi inițiale și secțiuni transversale diferite, din materiale diferite, si se suspendă de capătul inferior corpuri cu mase diferite se ajunge la urmatoarea concluzie: alungirea $\Delta l$ este direct proporțională cu forța deformatoare $F$ și lungimea inițială a firului $l_0$, dar invers proporțională cu aria inițială a secțiunii transversale a firului $S_0$, și depinde de materialul din care este confecționat firul. Rezultatele experimentale se pot scrie sub forma urmatoarei relații:

$$\Delta l = \frac{1}{E} \cdot \frac{F\, l_0}{S_0}$$

unde $E$ este o constantă de material care se numește *modulul de elasicitate longitudinal* sau *modulul lui Young* (N/m$^2$). Raportul $F/S_0 = \sigma$ reprezintă forța care se exercită pe unitatea de suprafață și se numește tensiune sau efort unitar. Raportul $\Delta l/l_0 = \varepsilon$ se numește alungire relativă sau deformație specifică. Relația de mai sus se poate atunci scrie sub forma $\sigma = E\,\varepsilon$ și ea ne arată că alungirile relative sunt proporționale cu eforturile unitare, pentru un material dat. Această dependență reprezintă *legea lui Hooke*.

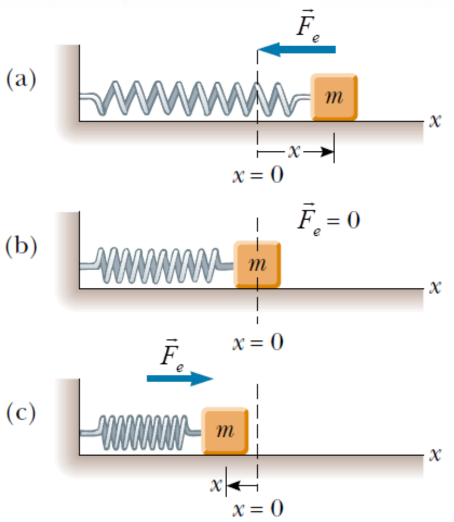
**Forța elastică.** Relația de mai sus, gasită experimental, se poate scrie și sub forma:

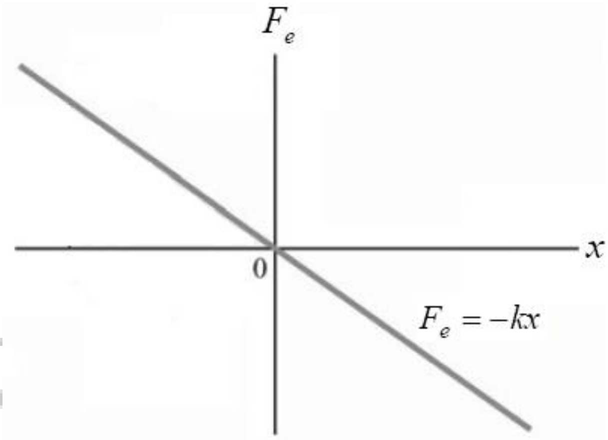
$$F = \frac{ES_0}{l_0}\Delta l$$

În această ultimă relație $ES_0/l_0$ este o constantă ce caracterizează un anumit fir. Se obișnuiește ca această constantă să se noteze cu $k$, numindu-se *constantă elastică* a firului sau a resortului (dacă este vorba despre un arc), unitatea ei de măsură fiind N/m. Atunci vom putea scrie forța deformatoare sub forma:

$$F = k\,\Delta l$$

În timpul deformării firului sau resortului, în el apare o forță egală ca mărime dar de sens opus forței deformatoare. Aceasta se numește *forță elastică* și o vom nota cu $F_e$.




Se obișnuiește să se noteze deformarea unui resort elastic cu *x*. În figura de mai sus este arătat un resort elastic în trei stări: (a) alungit cu *x*, (b) nedeformat și (c) comprimat cu *x*. Este ușor de văzut că forța elastică ce apare în resort se poate scrie astfel:

$$\vec{F}_e = -k\,x\vec{i} \quad \rightarrow \quad F_e = -kx$$

ceea ce înseamnă că forța elastică este proporțională cu valoarea deformației și orientată în sens opus creșterii deformației sau, cu alte cuvinte, forța elastică încearcă să readucă resortul la lungimea de echilibru (resort nedeformat). Tot în figura de mai sus este prezentat graficul dependenței forței elastice de deformare *x* a resortului.

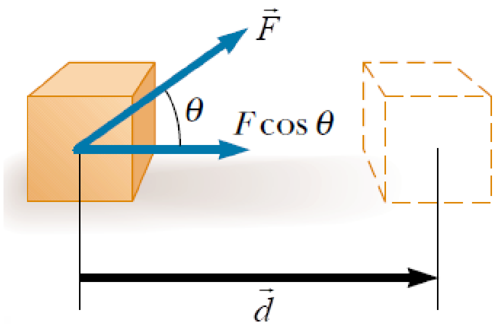
## I.6. Lucrul mecanic si puterea

**Lucrul mecanic.** În toate procesele în care se transmite mişcarea de la un corp la alt corp, un rol esențial îl joacă o mărime fizică numită *lucru mecanic*. Introducem această noțiune considerând mai multe cazuri.

**A.** *Lucrul mecanic al unei forțe constante* *F* al cărei punct de aplicație se deplasează *rectiliniu* pe distanța *d* dar direcția forței formează unghiul $\theta$ cu direcția deplasării, este egal cu produsul dintre mărimea componenței forței pe direcția deplasării, $F\cos\theta$, și mărimea deplasării:

$$L = Fd\cos\theta = \vec{F}\cdot\vec{d}$$

Se mai poate spune că lucrul mecanic al unei forțe constante este egal cu *produsul scalar dintre vectorii forta si deplasare*. În sistemul internațional [*L*] = N·m = J (Joule).

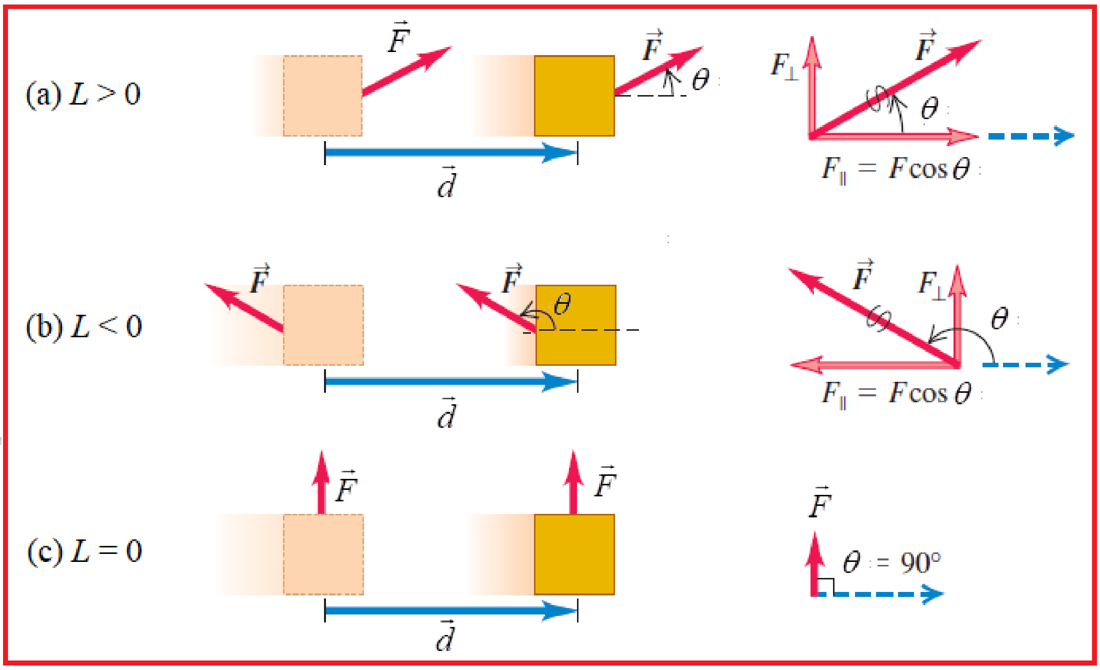



În funcție de mărimea unghiului $\theta$ dintre direcția forței și direcția deplasării putem avea (a se vedea si figura de mai jos):

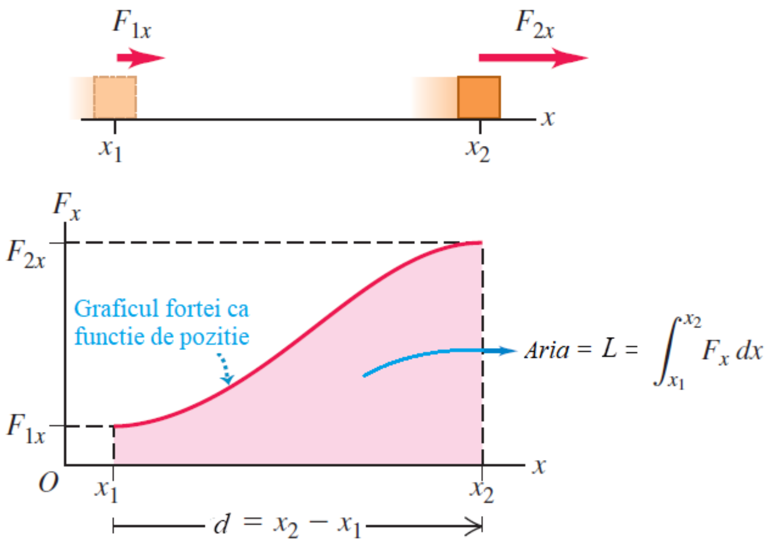
a) dacă $0 < \theta < 90^o$ , atunci $\cos\theta > 0$ și rezultă că $L > 0$, deci forța este o *forță motoare* și produce mișcare;

b) dacă $90^o < \theta < 180^o$ , atunci $\cos\theta < 0$ și rezultă că $L < 0$, deci forța este *rezistența*, adică se opune mișcării;

c) dacă $\theta = 90^o$, atunci $\cos\theta = 0$ și rezultă că $L = 0$, deci forța nu efectuează lucru mecanic.

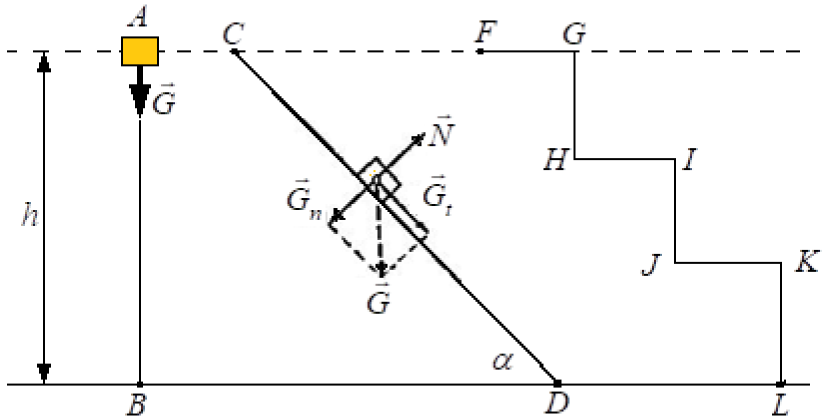



**B.** Lucrul mecanic al unei forțe $F$ al cărei punct de aplicație se deplasează rectiliniu, de exemplu de-a lungul axei $x$, dar *mărimea forței pe direcția deplasării*, $F_x$, se modifică în funcție de poziția punctului de aplicație pe axa $x$, adică $F_x = F_x(x)$, este dat de aria cuprinsă între graficul forței și axa coordonatei $x$, așa cum se arată în figura de mai jos.




**Cazuri particulare de calcul a lucrului mecanic.** În continuare vom exemplifica modul de calcul a lucrului mecanic pentru trei forțe des întâlnite în problemele de mecanică.

**A. Lucrul mecanic efectuat de greutate.** Să considerăm o regiune restrânsă din apropierea Pământului, în care câmpul gravitațional pote fi considerat uniform. În această regiune liniile de câmp sunt drepte paralele, iar accelerația gravitațională este constantă, adică are în toate punctele aceeași mărime, directive și sens. Înseamnă că greutatea unui punct material care se mișcă în acest câmp rămâne constantă pe toată durata mișcării lui.




Să presupunem că într-un punct $A$ al acestui câmp, la înălțimea $h$ față de suprafața Pământului, se află un corp de masă $m$, asimilat cu un punct material. Punctul material se poate deplasa de la nivelul $A$ la nivelul $B$, pe verticală, sau urmând unul dintre drumurile $CD$ sau $FGHIJKL$. Lucrul mecanic al greutății corpului, atunci când acesta cade liber pe vertical (drumul $AB$) este:

$$L_{G,AB} = G \cdot h = mgh.$$

Lucrul mecanic al greutății corpului, atunci când acesta coboară pe drumul înclinat *CD* este dat de lucrul mecanic al componenței paralele cu *CD* a greutății, adică componenta tangențială $G_t$, și avem:

$$L_{G,CD} = G_t \cdot CD = (mg \sin\alpha)\frac{h}{\sin\alpha} = mgh.$$

Pe drumul *FGHIJKL* greutatea efectuează lucru mecanic doar pe porțiunile verticale ale traseului. Pe porțiunile orizontale greutatea este perpendiculară pe deplasare și lucrurile mecanice vor fi zero. Adunând lungimile porțiunilor verticale se observă ușor că se obtine tot h, deci lucrul mecanic pe întregul traseu *FGHIJKL* va fi:

$$L_{G,\mathrm{FGHIJKL}} = G \cdot GH + G \cdot IJ + G \cdot KL = mg \cdot (GH + IJ + KL) = mgh.$$

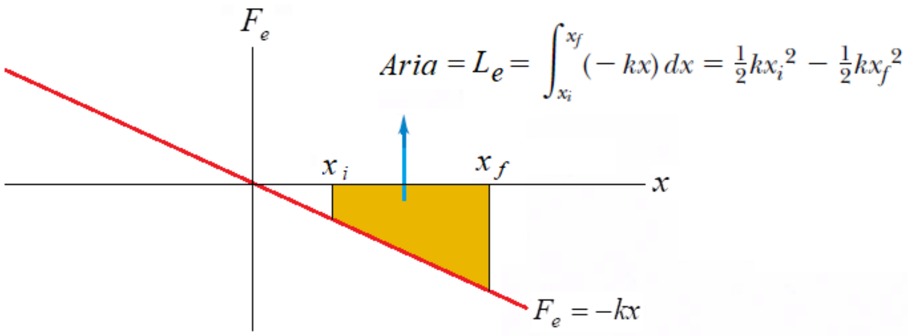
Indiferent cât de mici ar fi făcute „treptele” unui traseu asemănător cu *FGHIJKL*, lucrul mecanic al greutății va depinde doar de diferența de nivel dintre punctul inițial și punctul final al drumului urmat de punctul de aplicație al greutății: $L_G = mgh$.

**Concluzie:** Lucrul mecanic al greutății este independent de drumul parcurs de punctul material și este egal cu produsul dintre greutate și diferența de nivel dintre poziția inițială și poziția finală a punctului material. O forță care, acționând asupra unui punct material, efectuează un lucru mecanic independent de drumul parcurs și depinde doar de pozițiile punctelor extreme ale traiectoriei, se numește *forță conservativă* . *Greutatea este deci o forță conservativă*.

**B. Lucrul mecanic efectuat de forța elastică.** Forța elastică este un exemplu de forță a cărei mărime variază în funcție de poziția corpului asupra căruia acționează deoarece, așa cum am văzut, ea poate fi scrisă:

$$F_e = -kx$$

unde $k$ este constanta elastică a resortului și $x$ este deformarea resortului. În timpul deformării resortului sub acțiunea unei forțe deformatoare $F$ și a forței elastice $F_e$ se deplasează pe distanța $x$ atât punctul de aplicație al forței deformatoare cât și punctul de aplicație al forței elastice, ambele forțe efectuând lucru mecanic. Atât la întindere cât și la comprimare lucrul mecanic al forței deformatoare este un lucru mecanic motor, pe când cel al forței elastice este un lucru mecanic rezistent. Aceste două lucruri mecanice sunt egale și de semne diferite: lucrul forței deformatoare este pozitiv, iar cel al forței elastice este negativ. Lucrul mecanic al forței elastice $F_e = -kx$ se poate calcula folosind graficul de variație al acestei forțe în funcție de $x$, așa cum se arată în figura de mai jos (sau efectuând o integrală elementară, dacă sunteți elevi în clasa a XII-a).




Dacă se ia $x_i = 0$ atunci lucrul mecanic efectuat de forța elastică la deplasarea capătului resortului din punctul de echilibru până în punctul aflat la distanța $x$ de acesta se scrie:

$$L_e = -\frac{1}{2}kx^2$$

Se observă că lucrul mecanic al forței elastice nu depinde decât de poziția punctului inițial și a celui final al drumului parcurs de punctul de aplicație al forței. Deci *forța elastică este o forță conservativă*.

**C. Lucrul mecanic efectuat de forța de frecare**. Este vorba, bineînteles, de forța de frecare la alunecare. Notând, mai simplu, doar cu μ coeficientul de frecare la alunecare, mărimea forței de frecare la alunecare este direct proporțională cu reacțiunea normală $N$ ce acționează asupra corpului din partea planului (orizontal sau înclinat) pe care corpul alunecă: $F_f = \mu N$.

În cazul alunecării unui corp pe un plan orizontal, datorită inerției sau sub acțiunea unei forțe de tracțiune orizontale, forța de frecare la alunecare va avea sens opus sensului de mișcare al corpului și mărimea sa va fi $F_f = \mu N = \mu mg$ pentru că $N = G = mg$. Lucrul mecanic în cazul deplasării corpului pe distanța $d$ va fi atunci $L_f = F_f d \cdot \cos 180^{o} = -\mu mgd$.

Dacă un corp alunecă liber către baza unui plan înclinat cu unghiul $\alpha$ față de orizontala, reacțiunea normală din partea planului înclinat asupra corpului va fi $N = G_n = mg\cos\alpha$, forța de frecare va fi $F_f = \mu N = \mu mg\cos\alpha$ iar lucrul mecanic al forței de frecare la deplasarea corpului pe distanță $d$ va fi $L_f = F_f d \cdot \cos 180^{o} = -\mu mgd\cos\alpha$. Lucrul mecanic al forței de frecare depinde de drum, deci această forță este *neconservativă*.

**Randamentul planului înclinat.** Randamentul unei mașini este o mărime adimensională, notată de obicei cu litera $\eta$ din alfabetul grec, definită ca raportul dintre lucrul mecanic util și lucrul mecanic consumat de mașină.

Pentru a ridica *uniform* un corp pe un plan înclinat de unghi $\alpha$, având lungimea $l$ și înălțimea $h$, fără frecări, trebuie să aplicăm o forță de tracțiune egală cu componenta tangențială a greutății $G_t = G\sin\alpha$ și atunci trebuie să efectuăm un lucru mecanic util $L_u = G\sin\alpha \cdot l = mgh$, la fel ca pentru ridicarea corpului direct pe verticală. În prezență frecărilor, forța de tracțiune trebuie să fie egală cu suma dintre $G_t$ și forța de frecare $F_f$ pe planul înclinat, adica $G\sin\alpha + \mu G\cos\alpha$, și atunci trebuie să efectuăm lucrul mecanic (consumat) $L_c = mg \cdot (\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha) \cdot l$. Ridicarea corpului pe planul înclinat se face atunci cu randamentul:

$$\eta = \frac{L_u}{L_c} = \frac{mgh}{mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)l} = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} = \frac{1}{1 + \mu/\mathrm{tg}\alpha} = \frac{1}{1 + \mu\,\mathrm{ctg}\alpha}.$$

**Puterea.** Puterea este o mărime care se notează cu $P$ și caracterizează viteza cu care se efectuează lucrul mecanic. Prin definiție, *puterea medie* într-un interval de timp $\Delta t$ este egală cu raportul dintre lucrul mecanic efectuat, $\Delta L$ și timpul necesar producerii acestui lucru mecanic:

$$P_{med} = \frac{\Delta L}{\Delta t}.$$

Are sens să se definească puterea medie deoarece, în general, lucrul mecanic nu se efectuează în mod uniform în timp. Se mai poate defini *puterea instantanee P*, atunci când intervalul de timp $\Delta t$ devine foarte mic (tinde către zero):

$$P = \frac{dL}{dt} = \frac{\vec{F}\cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}.$$

Unitatea de masură pentru putere în S.I. este: $[P]_{SI} = [L] / [t] = 1$ J / 1 s = 1W (Watt).

## I.7. Energia mecanica

**Noțiunea de energie.** Energia este o mărime fizică scalară ce caracterizează capacitatea unui corp sau a unui sistem de corpuri de a produce lucru mecanic. Dacă un corp are capacitatea să efectueze lucru mecanic datorită unor factori mecanici cum ar fi schimbarea vitezei sale, schimbarea poziției sale într-un câmp de forțe sau deformării sale spunem că el posedă energie mecanică. De exemplu, dacă arcul unui pistol de jucărie este comprimat, prin destindere el va arunca proiectilul (bila) la o anumită distanță. Din acest exemplu rezultă că un corp efectuează lucru mecanic numai dacă el trece dintr-o stare în alta, arcul pistolului efectuează lucru mecanic numai când el se destinde.

Deoarece energia unui corp (sistem de corpuri) este legată de posibilitatea acestuia de a efectua lucru mecanic, este normal ca energia corpului (sistemului) să scadă cand el efectuează lucru mecanic asupra altor corpuri și invers, să crească atunci când se efectuează lucru mecanic asupra lui. Dacă notăm energia cu $E$, în stările $A$ și $B$ energia unui corp (sistem) va fi $E_A$ și respectiv $E_B$, variația energiei între stările $A$ și $B$ se va scrie $\Delta E = E_B - E_A$ și ea este măsurată prin lucrul mecanic efectuat în timpul acestei variații.

Energia este o *mărime fizică de stare*, caracterizând corpul (sistemul) într-o anumită stare staționară. Lucrul mecanic caracterizează corpul (sistemul) atunci când acesta ia parte la procesul de trecere dintr-o stare $A$ într-o stare $B$. Vom spune că lucrul mecanic este o *mărime de proces*. Energia mecanică $E$, la care ne vom referi în continuare, are două părți: *energia cinetică* $E_c$, sau energia de mișcare, și *energia potențială* $E_p$, numită și energie de poziție sau energie de configurație. Energia are aceeași unitate de masură ca și lucrul mecanic, adică Joulul (J).

**Energia cinetică a punctului material. Teorema variației energiei cinetice a punctului material.** Corpurile în mișcare posedă energie, deoarece acționând asupra altor corpuri le pot modifica starea de mișcare, deci pot să efectueze lucru mecanic. Energia pe care o posedă un corp datorită mișcării sale, în raport cu un anumit sistem de referință, se numește energie cinetică. Mai precis, *energia cinetică a unui corp de masa m, care se află în mișcare de translație cu viteza v, în raport cu un sistem de referință inerțial, este egală cu semiprodusul dintre masa corpului și pătratul vitezei acestuia*:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 .$$

Se poate ajunge foarte ușor la un rezultat important, foarte des folosit în rezolvarea unor probleme de mecanică. Chiar dacă demonstrația care urmează este facută într-un caz particular, rezultatul la care se ajunge este unul general. Să considerăm un punct material care se mișcă rectiliniu uniform variat, sub acțiunea unei forțe $\vec{F}$. Viteza punctului material variază de la $\vec{v}_1$ la $\vec{v}_2$ pe distanța $d = x_2 - x_1$ dintre două puncte $A$ și $B$ de pe traiectorie. Legătura dintre cele două viteze este dată de formula lui Galilei:

$$v_2^2 - v_1^2 = 2ad$$

Înlocuind în această relație accelerația $a$ cu cea dată de principiul al II-lea, $F = ma$, se obține:

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = Fd = L_{A \to B} .$$

Acest rezultat exprimă teorema variației energiei cinetice pentru un punct material, care se poate enunța astfel:
*Variația energiei cinetice a unui punct material, care se deplasează în raport cu un sistem de referință inerțial, este egală cu lucrul mecanic efectuat de forța rezultantă care acționează asupra punctului material în timpul acestei variații, adică:*

$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = L_{A \to B} .$$

Facem precizarea că în teorema variației energiei cinetice *în lucrul mecanic total intră atât lucrul mecanic al forțelor conservative (greutate, forța elastică) cât și lucrul mecanic al forțelor neconservative (forța de frecare).*

**Energia potențială a punctului material.** Există și o energie mecanică asociată poziției unui corp față de alte corpuri, sau configurației unui sistem de corpuri, această energie se numește *energie potențială. Ea se definește doar în cazul forțelor conservative*. Să considerăm un punct material de masa m, plasat în punctul $P_1$ din câmpul gravitațional al Pământului, presupunem că în regiunea respectivă câmpul gravitațional al Pământului este uniform. Punctul material și Pământul, care interacționează prin câmpul gravitațional, alcătuiesc un sistem fizic cu o configurație variabilă, în cadrul căruia acționează doar forțe conservative (greutatea). Lăsăm punctul material să cadă liber de la înălțimea $h_1$, măsurată față de nivelul $A$ al solului. Să calculăm lucrul mecanic al greutății atunci cand punctul material $m$ se deplasează din punctul $P_1$

până în punctul $P_2$, acesta din urma fiind situat la înălțimea $h_2$ față de același nivel $A$ al solului. Vom avea:

$$L_G(h_1 \to h_2) = G(h_1 - h_2) = mgh_1 - mgh_2.$$

Dacă raportăm înălțimile punctelor $P_1$ și $P_2$ față de nivelul B al solului, mai jos decât nivelul A, acestea se vor situa la înălțimile $h_1$' și respectiv $h_2$', iar lucrul mecanic al greutății când punctul material $m$ se deplasează din punctul $P_1$ până în punctul $P_2$ va fi:

$$L_G(h_1^{'} \to h_2^{'}) = G(h_1^{'} - h_2^{'}) = L_G(h_1 \to h_2)!$$

Prima concluzie care se desprinde din rezultatele de mai sus este ca lucrul mecanic al greutății (care este o forța conservativă) nu depinde de alegerea *nivelului de referință* față de care măsurăm înăltimea $h$, ci doar de diferența de nivel dintre poziția inițială și poziția finală. În cele mai multe aplicatii, nivelul de referință se alege ca fiind nivelul cel mai coborât la care poate ajunge punctul material, la acest nivel energia sistemului corp-Pământ fiind minimă, în mod uzual, nivelul de referință se alege la suprafața Pământului ($h$ = 0).

A doua concluzie este și mai importantă. Observăm că lucrul mecanic al greutății la deplasarea corpului $m$ între punctele $P_1$ și $P_2$ se poate scrie ca diferență dintre valorile aceleiași mărimi, calculată în punctele $P_1$ și $P_2$:

$$\begin{aligned}
&L_G(h_1 \to h_2) = G(h_1 - h_2) = mgh_1 - mgh_2,\\
&mgh_1 = functie_g\ (P_1)\\
&mgh_2 = functie_g\ (P_2)\\
&\Rightarrow L_G(h_1 \to h_2) = functie_g\ (P_1) - functie_g\ (P_2)
\end{aligned}$$

Numim această funcție *energie potențială gravitațională* a sistemului „corp de masa $m$ – Pământ”, atunci când corpul se află la înălțimea $h$ față de suprafața Pământului și o notăm astfel:

$$E_{p,g} = mgh;$$

indicele „$g$” arată că este vorba despre energia potențială gravitațională. Rezultă că lucrul mecanic al greutății se va putea scrie astfel:

$$L_G(h_1 \to h_2) = E_{p,g}(P_1) - E_{p,g}(P_2)$$

Dacă vorbim de variația energiei potențiale gravitaționale între punctele $P_1$ (inițial) și $P_2$ (final), atunci această variație se scrie, ca de obicei, scăzând din valoarea finală a energiei potențiale valoarea inițială a acesteia:

$$\Delta E_{p,g}. = E_{p,g}(P_2) - E_{p,g}(P_1) = -L_G(h_1 \to h_2)$$

Din concluziile de mai sus rezultă că energia potențială gravitațională este determinată până la o constantă aditivă, care depinde de nivelul de referință ales pentru exprimarea înălțimii $h$. În cazul forței elastice se pot face raționamente în mod analog cu cele de mai sus. Lucrul mecanic al forței elastice la deplasarea punctului sau de aplicație între elongațiile $x_1$ și $x_2$ se va putea scrie:

$$L_{el}(x_1 \to x_2) = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 = functie_{el}(x_1) - functie_{el}(x_2),$$
$$functie_{el}(x_1) = \frac{1}{2}kx_1^2$$
$$functie_{el}(x_2) = \frac{1}{2}kx_2^2$$
$$\Rightarrow functie_{el}(x) = \frac{1}{2}kx^2 = E_{p,el}$$

Înseamnă că *energia potențială elastică* a unui resort cu constanta elastică *k*, a cărui deformare este *x*, se scrie:

$$E_{p,el} = \frac{1}{2}kx^2$$

iar variația energiei potențiale elastice între punctele $x_1$ (inițial) și $x_2$ (final) se va scrie:

$$\Delta E_{p,el.} = E_{p,el}(x_2) - E_{p,el}(x_1) = -L_{el}(x_1 \to x_2)$$

**Energia mecanică totală. Conservarea energiei mecanice.** Să considerăm un exemplu foarte simplu. Un corp de masă *m* coboară pe un plan înclinat de unghi *α*, cu frecare. În momentul în care corpul se află la înălțimea $h_1$ față de baza planului înclinat viteza sa este $v_1$, iar atunci când se află la înălțimea $h_2 < h_1$ viteza sa este $v_2 > v_1$. Scriem teorema variației energiei cinetice pentru corpul care coboară pe planul înclinat, între punctele situate la înălțimile $h_1$ și respectiv $h_2$:

$$\Delta E_c = L_{tot} = L_G + L_N + L_{Ff}$$

unde:

$$L_N = \text{lucrul mecanic al reactiunii normale} = 0;$$
$$L_G = mgh_1 - mgh_2 = E_{p,g}(1) - E_{p,g}(2).$$

Teorema variației energiei cinetice se va scrie acum:

$$E_c(2) - E_c(1) = E_{p,g}(1) - E_{p,g}(2) + L_{Ff}$$

și mutând în membrul stâng termenii care reprezintă energiile potențiale gravitaționale se obține:

$$\left[E_c(2) + E_{p,g}(2)\right] - \left[E_c(1) + E_{p,g}(1)\right] = L_{Ff}.$$

Numind *energie mecanică totală*, sau simplu *energie mecanică*, suma dintre energia cinetică și energia potențială, pe care o notăm cu *E*, adică:

$$E = E_c + E_p,$$

ultima formă a teoremei variației energiei cinetice pentru corpul din exemplul nostru se va scrie:

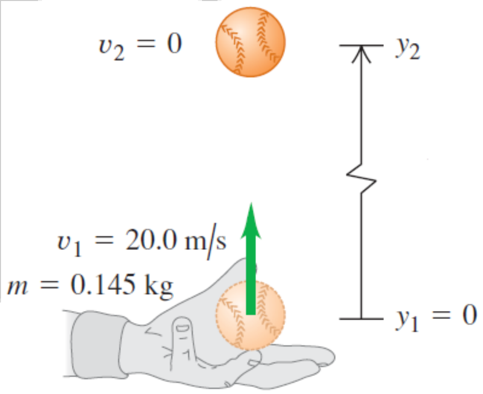
$$E(2) - E(1) = \Delta E = L_{Ff}.$$

Observăm că variația energiei mecanice totale este egală cu lucrul mecanic al forței de frecare, care este neconservativă. Acest rezultat este general si poate fi enuntat astfel: *Variația energiei mecanice totale la deplasarea unui punct material pe un anumit drum este egală cu lucrul mecanic al fortelor neconservative aplicate punctului material în timpul deplasării pe acel drum.* Acesta este enunțul teoremei variației energiei mecanice totale pentru un punct material. Ultimul rezultat mai poate fi enunțat și în felul urmator: *Energia mecanică totală a unui punct material nu se poate modifica decât sub acțiunea unor forțe neconservative.* Acest enunț conduce la urmatoarea concluzie: *Daca asupra unui punct material nu acționează nici o forță neconservativă, sau dacă suma lucrurilor mecanice ale forțelor neconservative pe o anumită perioadă de timp este zero, atunci energia mecanică totală a punctului material în acel interval de timp nu se modifică:*

$$E = E_c + E_p = \text{constant.}$$

Astfel poate fi enunțată legea conservării energiei mecanice pentru un punct material.
Pentru a intelege cat mai corect ce inseamna “conservarea energiei” sa consideram urmatorul exemplu foarte simplu:

Un copil aruncă vertical în sus o minge de oină cu viteza $v_0$ = 20,0 m/s. Masa mingii este $m$ = 0,145 kg. Pentru simplitate, să luăm valoarea accelerației gravitaționale $g$ = 10 m/s$^2$. Să se determine valoarea energiei mecanice totale a mingii pe parcursul mișcării sale. Este ea constantă?

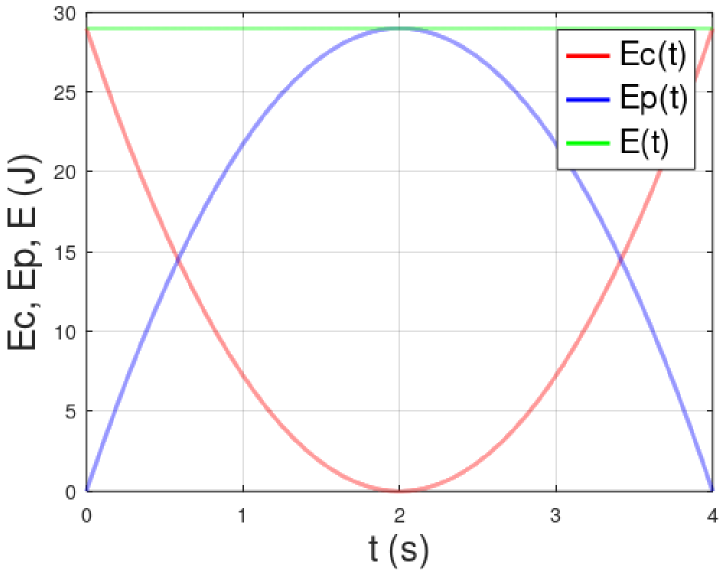



Rezolvare:
Mișcarea mingii este rectilinie uniform variată. Notăm direcția mișcării cu $y$, sensul pozitiv fiind în sus. Cu această alegere, accelerația mingii este $a_y = -g$ = - 10 m/s$^2$. După timpul $t$ de la aruncarea mingii, viteza ei va fi $v_y = v_0 - gt$, iar înălțimea la care se va afla mingea va fi $y = v_0t - gt^2/2$. Rezultă că la momentul $t$ energia cinetică $E_c$, energia potențială gravitațională $E_{pg}$ și energia totală $E$ vor fi:

$$E_c(t) = \frac{1}{2}mv_y^2 = \frac{m}{2}\left(v_0^2 + g^2t^2 - 2v_0gt\right),$$
$$E_{pg}(t) = mgy = mg\left(v_0t - gt^2/2\right),$$
$$E(t) = E_c(t) + E_{pg}(t) = .....= \frac{mv_0^2}{2} = \text{constant.}$$

Astfel, am arătat că energia totală a mingii este constantă în timpul mișcării, ea având valoarea $E$ = 29 J. Dar ce se întâmplă cu energiile cinetică și potențială? Cum sunt ele în timpul mişcării mingii? În figura de mai jos sunt prezentate dependentele de timp ale energiilor $E_c$, $E_p$ și $E$.

Energia cinetică *inițială* este maximă. Pe masură ce corpul urcă, energia sa potențială crește iar energia sa cinetică scade, până în punctul de înălțime maximă (la $t$ = 2,00 s), după care comportarea acestora se inversează: energia potențială scade iar energia cinetică crește. Dar, în fiecare moment, suma dintre energia potențială și energia cinetică este aceeași, adică energia totală se conservă.




## I.7. Impulsul punctului material și a unui sistem de puncte materiale

**Impulsul unui punct material.** Impulsul unui punct material este un vector $\vec{p}$ definit ca produsul dintre masa $m$ a punctului material și viteza sa $\vec{v}$, adică $\vec{p} = m\vec{v}$. Deoarece masa $m$ se exprimă printr-un număr pozitiv, vectorul impuls are aceeași direcție și același sens ca vectorul viteză. Dacă presupunem că masa punctului material $m$ este constantă și derivăm în raport cu timpul ambii membri ai relației de definiție $\vec{p} = m\vec{v}$ se obține:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F} \qquad \rightarrow \qquad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F},$$

adică: *viteza de variație a impulsului unui punct material este proporțională cu forța rezultantă care acționează asupra punctului material*. Dacă presupunem că forța $\vec{F}$ este constantă, atunci putem scrie că variația infinitezimală a impulsului este dată de relația

$$d\vec{p} = \vec{F}dt$$

care exprimă *teorema impulsului pentru un punct material în forma diferențială*. Putem integra în ambii membri ultima relație, între momentele $t_i$ și $t_f$, și obținem:

$$\int_{p_i}^{p_f} d\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}dt$$

$$\Rightarrow \vec{p}_f - \vec{p}_i = \vec{F}(t_f - t_i) \quad \text{sau} \quad \Delta\vec{p} = \vec{F}\cdot\Delta t$$

Produsul $\vec{F} \cdot \Delta t$ se numește impulsul forței și atunci ultimul rezultat poate fi enunțat astfel: *variația impulsului unui punct material pe intervalul de timp de la $t_i$ la $t_f$ este egală cu impulsul forței aplicate punctului material.* Aceasta este *teorema impulsului unui punct material în forma integrală*. În coordonate carteziene, teorema impulsului în forma integrală poate fi scrisă pe componente astfel:

$$p_{fx} - p_{ix} = F_x \cdot \Delta t,$$
$$p_{fy} - p_{iy} = F_y \cdot \Delta t,$$
$$p_{fz} - p_{iz} = F_z \cdot \Delta t,$$

unde semnificația mărimilor din ecuații este evidentă. Din teorema impulsului rezultă că pentru o variație dată a impulsului, cu cât $\Delta t$ este mai mic forța $F$ trebuie să fie mai mare și invers, cu cât $\Delta t$ este mai mare cu atât forța $F$ trebuie să fie mai mică. Această observație este foarte importantă pentru unele aplicații care folosesc amortizarea: airbag-uri la mașini, saltelele sportivilor etc. Unitatea de măsură a impulsului rezultă din definiția sa:

$$[p] = [m][v] = 1 \text{ kg} \cdot 1 \text{ m/s} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s} = 1 \text{ N} \cdot 1 \text{ s} = 1 \text{ N·s}.$$

O relație des folosită este cea care leagă energia cinetică de impulsul corpului având masa $m$ și viteza $v$:

$$E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}.$$

**Impulsul unui sistem de puncte materiale.** Să considerăm un sistem de $N$ puncte materiale, având masele $m_i$ și vitezele $\vec{v}_i$. Presupunem că masele $m_i$ sunt constante, astfel încât $\sum_i m_i = M$, care reprezintă masa sistemului, este și ea constantă. Punctele materiale din sistem pot interacționa între ele (prin *forțe interne*) și cu mediul exterior (prin *forțe externe*). Sistemul ca un întreg va avea un impuls $\vec{P}$, definit ca suma impulsurilor fiecărui punct material din sistem:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + .......+ \vec{p}_N = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i .$$

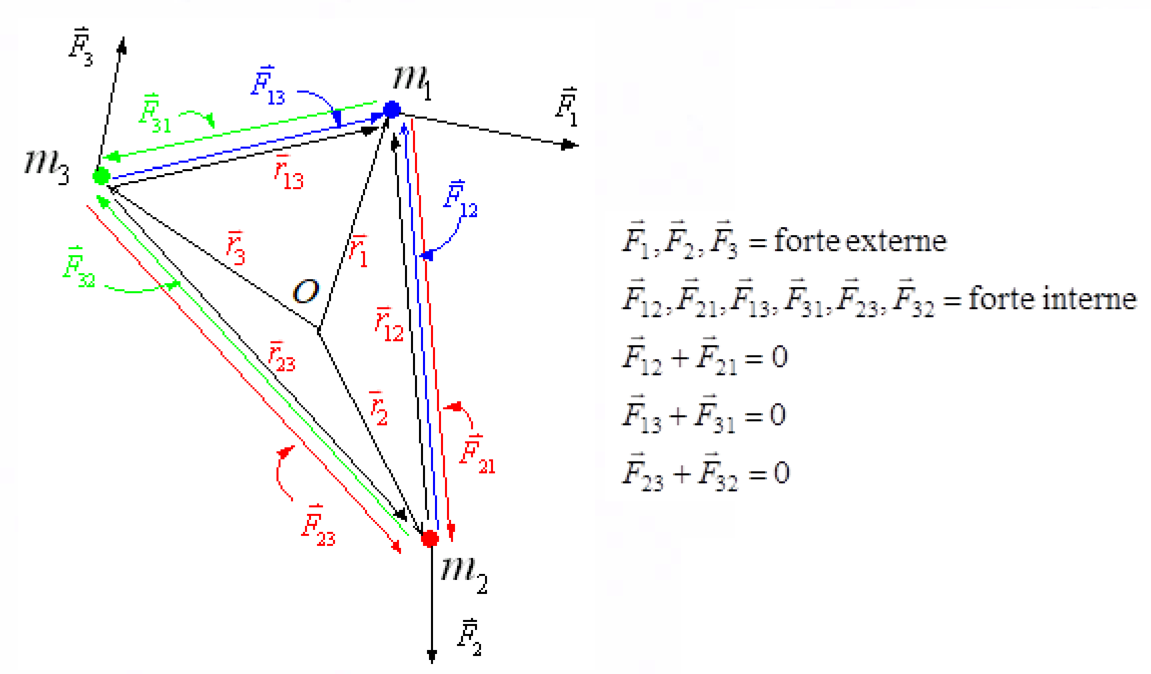
Ca și în cazul unui singur punct material, se poate pune întrebarea cui se datorează variația în timp a impulsului sistemului de puncte materiale. Pentru a găsi răspunsul derivăm în raport cu timpul expresia lui $\vec{P}$:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{P}}{dt} &= \frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + ......+ m_N\vec{v}_N) = \\ &= m_1\frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{v}_2}{dt} + ......+ m_2\frac{d\vec{v}_N}{dt} = \\ &= m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + ........+ m_N\vec{a}_N = \\ &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ......\vec{F}_N = \\ &= \sum_i \vec{F}_i\end{aligned}$$

Dar, în cazul sistemelor de puncte materiale, forța $\vec{F}_i$ care acționează asupra particulei *i* se poate datora atât interacțiunilor cu unele corpuri care nu fac parte din sistem cât și intercațiunii cu celelalte puncte materiale care aparțin sistemului. Vom scrie acest lucru astfel:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\,\mathrm{int}} + \vec{F}_i^{\,ext},$$

unde $\vec{F}_i^{\,\mathrm{int}}$ este rezultanta forțelor interne care acționează asupra particului *i* din sistem, iar $\vec{F}_i^{\,ext}$ este rezultanta forțelor externe care acționează asupra particului *i* din sistem.




Dar, între particulele *i* si *k* din sistem acționează forțele $\vec{F}_{ik}$ și $\vec{F}_{ki}$ care respectă principiul acțiunii și reacțiunii, astfel încât $\vec{F}_{ik} + \vec{F}_{ki} = 0$. Rezultă că *rezultanta tuturor forțelor interne din sistem este zero,* $\sum_i \vec{F}_i^{\,\mathrm{int}} = 0$ ! De aici rezultă că rezultanta tuturor forțelor care acționează asupra punctelor materiale din sistem va fi:

$$\sum_i \vec{F}_i = \sum_i \vec{F}_i^{\,ext} = \vec{F}^{\,ext},$$

unde am notat cu $\vec{F}^{\,ext}$ rezultanta forțelor externe care acționează asupra particulelor din sistem. Rezulta ca viteză de variație a impulsului sistemului de puncte materiale va fi dată de:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{\,ext}.$$

Această relație ne arată că impulsul total al unui sistem de puncte materiale nu se poate modifica decât dacă asupra particulelor sistemului acționează forțe externe a căror rezultantă este diferită de zero. Însă, dacă rezultanta forțelor externe care acționează asupra particulelor unui sistem este zero, atunci variația în timp a impulsului sistemului este zero și deci impulsul sistemului va fi constant:

$$\vec{F}^{ext} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = \text{constant!}$$

Acest rezultat important se enunță astfel: *Dacă forța rezultantă externă care acționează asupra unui sistem de particule este nulă, vectorul impuls al sistemului este constant (nu se modifică).* Aceasta este *legea conservării impulsului* pentru un sistem de puncte materiale.

**Ciocnirea a două corpuri.** Prin ciocnirea a două corpuri se înțelege un proces de interacțiune care durează un timp finit, astfel încât atât înainte, cât și după ciocnire corpurile nu interacționează. În cazul corpurilor macroscopice care interacționează prin contact ciocnirea durează atât timp cât ele sunt în contact, acest timp fiind foarte scurt față de duratele obișnuite (de ordinul milisecundelor). În timpul foarte scurt cât durează ciocnirea, forțele externe obișnuite (cum ar fi greutate, forțele de frecare) nu pot modifica în mod substanțial impulsul total al sistemului. De aceea, chiar dacă corpurile care se ciocnesc sunt supuse și unor forțe externe, putem totuşi scrie *conservarea impulsului total al sistemului* în felul urmator: *Suma vectorială a impulsurilor corpurilor imediat înainte de ciocnire este egală cu suma vectorială a impulsurilor corpurilor după ciocnire:*

$$\vec{P}_{initial} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{P}_{final} = \vec{p}_1^{\,'} + \vec{p}_2^{\,'} \qquad \Rightarrow \qquad m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1^{\,'} + m_2\vec{v}_2^{\,'}$$

În continuare vom prezenta sumar cele două cazuri extreme ale ciocnirilor dintre două corpuri: ciocnirea plastică și ciocnirea elastică.

### 1. *Ciocnirea plastică (total inelastică)*

În acest caz, prin ciocnire corpurile se cuplează, se lipesc și își continuă mișcarea împreună, cu aceeași viteză comună. Conservarea impulsului la ciocniri se scrie:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}' \quad \text{de unde} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}' = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}.$$

În ciocnirea plastică o parte din energia cinetică a corpurilor se transformă în alte forme de energie (în special caldură) pe care o putem calcula din conservarea energiei:

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\vec{v}'^2 + Q$$

$$\Rightarrow Q = -\Delta E_c = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\vec{v}'^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2)^2.$$

### 2. *Ciocnirea perfect elastică*

Ciocnirea este perfect elastică dacă energia cinetică a sistemului de corpuri se conservă prin ciocnire, adică energia cinetică totală a corpurilor înainte de ciocnire este egală cu energia totală a corpurilor după ciocnire:

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^{'2} + \frac{1}{2}m_2v_2^{'2}$$

Bineînteles, în cazul ciocnirilor elastice se conservă și impulsul, așa cum am arătat mai sus. În cazul *unidimensional*, când atât înainte de ciocnire cât și după ciocnire particulele se mişcă pe aceeași dreaptă, legile de conservare ale energiei cinetice și impulsului se scriu:

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^{'2} + \frac{1}{2}m_2v_2^{'2}$$

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1^{'} + m_2v_2^{'}$$

De obicei se cunosc $m_1$, $m_2$, $v_1$, $v_2$ și se dorește determinarea vitezelor dupa ciocnire. Rezolvând sistemul de două ecuații de mai sus rezultă vitezele după ciocnirea perfect elastică unidimensională a două particule:

$$v_1^{'} = 2\frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} - v_1, \qquad v_2^{'} = 2\frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} - v_2.$$

Un caz particular interesant este cel în care particula 2 este în repaus înainte de ciocnire ($v_2 = 0$). Vitezele particulelor dupa ciocnire vor fi:

$$v_1^{'} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1, \qquad v_2^{'} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1.$$

Un alt caz interesant este cel în care masele celor două particule sunt egale. Din ecuațiile generale de mai sus rezultă ca vitezele după ciocnire vor fi:

$$v_1^{'} = v_2, \qquad v_2^{'} = v_1,$$

adică cele două particule schimbă vitezele între ele. Dacă masele sunt egale și a doua particulă este inițial în repaus ($v_2 = 0$), atunci primul corp se oprește ($v_1$' = 0) iar a doua particulă începe să se miște cu viteza pe care o avea prima particulă înainte de ciocnire ($v_2$' = $v_1$).

# Capitolul II – *Testarea cunoștințelor prin întrebări și probleme*

## II.1. Testul 1

**Se consideră acceleraţia gravitaţională $g$ = 10m/s$^2$.**

**<u>SUBIECTUL I</u>**

**<u>Pentru itemii 1-5 trebuie aleasă litera corespunzătoare răspunsului considerat corect.</u>**

**1.** Știind că notațiile sunt cele utilizate în manualele de fizică, unitatea de masură a mărimii fizice care are expresia $E_c/\Delta x$, exprimată prin unități fundamentale din S.I., este:

**a.** kg·m·s$^{-1}$ **b.** kg·m$^{-1}$·s$^{-1}$ **c.** kg·m·s$^{-2}$ **d.** kg·m$^2$·s$^{-1}$

**2.** Orientarea vectorului viteză:

**a.** coincide cu orientarea vectorului accelerație, indiferent de forma traiectoriei descrise de punctul material;

**b.** se modifică dacă traiectoria descrisă de punctul material este curbilinie;

**c.** se modifică dacă traiectoria descrisă de punctul material este rectilinie uniformă și acesta se îndepărtează față de reperul ales;

**d.** este întotdeauna aceeași cu a vectorului de poziție.

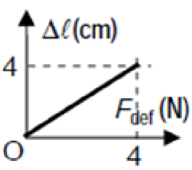
**3.** O sondă spațială, pornind dintr-un loc în care accelerația gravitațională este $g_1$ = 9,78 m·s$^{-2}$, ajunge în altul în care $g_2$ = 1,63 m·s$^{-2}$. Ca urmare, greutatea sondei înregistrează o variație relativă aproximativ egală cu:

**a.** -8,2 **b.** -0,83 **c.** 0,83 **d.** 5

**4.** Un corp de masa $m$ este lăsat liber în camp gravitațional uniform, la înălțimea $h_1$ față de sol. Asupra corpului acționează o forță de frecare constantă $F_f$. În punctul B, situat la înălțimea $h_2 < h_1$, energia cinetică a corpului are expresia:

**a.** $E_{c2} = mg(h_2 - h_1)$ **b.** $E_{c2} = mg(h_1 - h_2)$ **c.** $E_{c2} = mg(h_2 - h_1) + F_f(h_1 - h_2)$ **d.** $E_{c2} = (mg - F_f)(h_1 - h_2)$

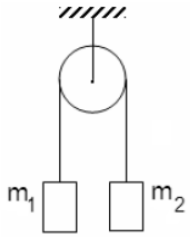
**5.** Alungirea unui resort de masă neglijabilă depinde de forța deformatoare conform graficului redat în figura alăturată. Forța deformatoare acționează la capătul liber al resortului și de-a lungul acestuia. Lucrul mecanic efectuat de forța deformatoare lent crescătoare pentru alungirea resortului cu 4 cm este:




**a.** 80 mJ **b.** 240 mJ **c.** 400 mJ **d.** 480 mJ

**<u>SUBIECTUL II</u> - Rezolvaţi următoarea problemă:**

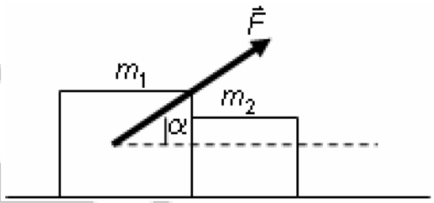
Două corpuri, de mase $m_1 = 1$ kg şi $m_2 = 2$ kg sunt suspendate prin intermediul unui fir inextensibil, de greutate neglijabilă, trecut peste un scripete ideal fix, ca în figura alăturată.




**a.** Reprezentaţi toate forţele care acţionează asupra celor două corpuri;
**b.** Determinaţi acceleraţia sistemului;
**c.** Calculaţi valoarea forţei de tensiune din fir;
**d.** Se dezleagă corpul de masă $m_2$ şi în locul său se trage în jos cu o forţă egală cu greutatea sa. Calculaţi noua valoare a acceleraţiei corpului de masă $m_1$.

**<u>SUBIECTUL III</u> - Rezolvaţi următoarea problemă:**

Asupra unui corp cu masa $m_1 = 2$ kg aflat iniţial în repaus, pe un plan orizontal, acţionează o forţă constantă $\vec{F}$, a cărei direcţie formează unghiul $\alpha = 30^o$ cu suprafaţa planului. Corpul se găseşte în contact cu un al doilea corp, de masă $m_2 = 0{,}5$ kg ca în figura alăturată. Pentru deplasarea sistemului pe o distanţă $d = 10$ m lucrul mecanic efectuat de forţa de tracţiune este de 173 J , iar cel al forţelor de frecare este egal, în valoare absolută, cu 15 J.



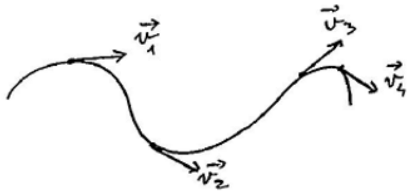

Se consideră că ambele corpuri au acelaşi coeficient de frecare la alunecare cu planul orizontal, iar între cele două corpuri nu există frecare.
**a.** Determinaţi valoarea forţei de tracţiune;
**b.** Calculaţi coeficientul de frecare la alunecare dintre corpuri şi suprafaţa orizontală;
**c.** Determinaţi puterea medie disipată prin frecare de corpul cu masa $m_2$ pe distanţa $d$;
**d.** Aflaţi viteza sistemului de corpuri după parcurgerea unei distanţe $D = 20$ m din momentul aplicării forţei $\vec{F}$.

## Rezolvare test 1

### SUBIECTUL I:

1. Unitatea de măsură a mărimii $\frac{E_c}{\Delta_x}$ , în S.I. prin unități fundamentale:

$\left[\frac{E_c}{\Delta x}\right] = 1\frac{J'}{m} = 1\frac{N\cdot m}{m} = 1N = 1kg\cdot\frac{m}{s^2} \rightarrow$ **Răspuns: c.**

2. 

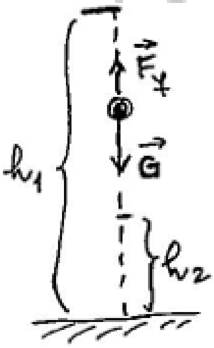

$\vec{v}$ este tangentă în traiectorie, în fiecare punct.
**Răspuns: b.**

3. $g_1 = 9{,}78\ \frac{m}{s^2}$ și $g_2 = 1{,}63\frac{m}{s^2}$ ; $G_1 = mg_1$ și $G_2 = mg_2$

$\Delta G = G_2 - G_1$

variația relativă $= \frac{\Delta G}{G_1} = \frac{m(g_2-g_1)}{mg_1} = \frac{g_2}{g_1} - 1 = -0{,}83$

**Răspuns: b.**

4. 


Din T.E.C între stările 1 și 2 avem:

$$E_{c(2)} - E_{c(1)} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_{F_f} = mg(h_1 - h_2) - F_f(h_1 - h_2)$$
$$= (h_1 - h_2)(mg - F_7)$$

$$\rightarrow E_{c(2)} = (h_1 - h_2)\big(mg - F_f\big)$$

**Răspuns: d.**

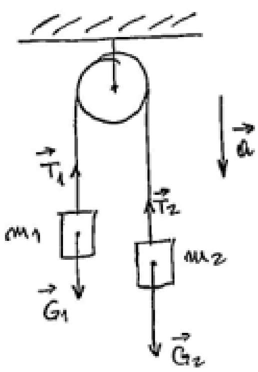
5. $F_{def} = k\cdot\Delta\ell \rightarrow k = \frac{F_{def}}{\Delta\ell} = \frac{4N}{4cm} = \frac{4N}{4\cdot10^{-2}m} = 10^2\,\frac{N}{m}$

$\mathcal{L}_{def} = k\cdot\Delta\ell^2 = \dfrac{10^2\cdot(4\cdot10^{-2})}{2} = 8\cdot10^{-2}J = 80\text{ mJ}$

**Răspuns: a.**

### SUBIECTUL II:

a)



b) a=?

Scriem ecuația principiului II pentru fiecare corp:

$$\begin{cases} m_1\vec{a} = \overrightarrow{G_1} + \overrightarrow{T_1} \\ m_2\vec{a} = \overrightarrow{G_2} + \overrightarrow{T_2} \end{cases} \quad \begin{cases} m_1 a = T - G_1 \\ m_2 a = G_2 - T \end{cases} \Bigg| \text{ le adunăm membru cu membru}$$

unde $T_1 = T_2 = T$

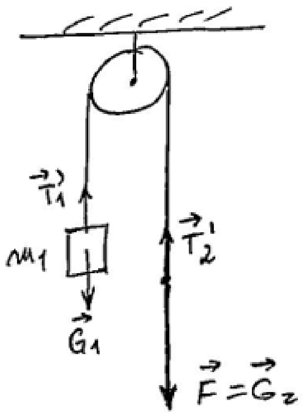
$$(m_1 + m_2)a = m_2 g - m_1 g \rightarrow a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot g \rightarrow a = 3{,}33\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

c) T=?

Din ecuația principiului II pentru corpul1 avem:

$$m_1 a = T - m_1 g \rightarrow T = m_1(a + g) \rightarrow T = 13{,}33\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

d)




Ideea este următoarea: noi am scris la punctul b) principiul II pentru fiecare corp al sistemului și de aceea am inclus în cele două ecuații și tensiunile în fir. Dar tensiunile sunt forțe interne și suma forțelor interne este 0. Dacă vrem să aflăm doar accelerația sistemului putem să scriem principiul II pentru tot sistemul și să luăm în considerare doar forțele externe:

$$m_{sistem}\vec{a} = \Sigma\overrightarrow{F_{externe}}$$

La punctul a) puteam scrie: $(m_1 + m_2)\vec{a} = \overrightarrow{G_1} + \overrightarrow{G_2} \rightarrow (m_1 + m_2)a = m_2 g + m_1 g$, adică exact ecuația obținută prin însumarea ecuației scrise pentru cele 2 corpuri la punctul a).

La pucntul d) masa sistemului s-a schimbat, dar forțele exterioare au rămas aceleași ca mărime.

$$m_1\overrightarrow{a'} = \vec{F} + \overrightarrow{G_1} \rightarrow m_1 a' = F - G_1 = G_2 - G_1 = (m_2 - m_1)g$$

$$a' = \frac{m_2 - m_1}{m_1} \cdot g \rightarrow a' = 10\frac{m}{s^2}$$

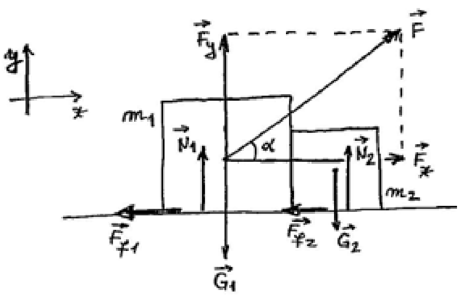
Cât este tensiunea în fir?

$$T_1' = T_2' = T'$$

$$m_1 a' = T' - m_1 g \rightarrow T' = m_1 a' + m_1 g = \frac{m_2 - m_1}{m_1} \cdot g + m_1 g = m_2 g = G_2$$

**SUBIECTUL III:**

a)



$m_1 = 2\ kg;\ m_2 = 0{,}5\ kg;\ \alpha = 30°;\ d = 10\ m;\ \mathcal{L}_F = 173$ J; $|\mathcal{L}_{F_f}| = 15$ J; $v_0 = 0$

F=? (forța de tracțiune)

$$\mathcal{L}_F = (F \cdot cos\alpha)d \rightarrow F = \frac{\mathcal{L}_F}{d \cdot cos\alpha} \rightarrow F = \frac{173}{10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 20N$$

b) $\mu_1 = \mu_2 = \mu = ?$

$\mathcal{L}_{F_f} = \mathcal{L}_{F_{f_1}} + \mathcal{L}_{F_{f_2}} = -\mu N_1 d - \mu N_2 d$

$N_1 = G_1 - F_y = m_1 g - Fsin\alpha$

$N_2 = G_2 = m_2 g$

$\rightarrow \mathcal{L}_{F_f} = -\mu(m_1 g - Fsin\alpha)d - \mu m_2 g d = -\mu[(m_1 + m_2)g - Fsin\alpha]d$

Deoarece noi știm $|\mathcal{L}_{F_f}| = 15$ J putem afla pe $\mu$ astfel $\mu = \frac{|\mathcal{L}_{F_f}|}{[(m_1+m_2)g - Fsin\alpha]d} \rightarrow \mu = 0{,}1$

c) $P_{Ff_2} = \frac{\mathcal{L}_{Ff_2}}{\Delta t} = \frac{-\mu m_2 g d}{\Delta t}$

**Metoda 1**

La numărător știm tot, ar trebui să calculăm pe $\Delta t =$ timpul în care sistemul se mișcă pe distanța $d$ = 10 m. Aflăm accelerația $a$ → din legea spațiului $d = \frac{1}{2}\ a\Delta t \rightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{2d}{a}}$

Accelerația o aflăm din principiul II scris pentru sistemul compus din cele 2 corpuri:

$$(m_1 + m_2)a = Fcos\alpha - F_{f_1} - F_{f_2} = Fcos\alpha - \mu(m_1 g - Fsin\alpha) - \mu m_2 g$$
$$= F(cos\alpha + \mu sin\alpha) - \mu(m_1 + m_2)g$$

$$\rightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{2d}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10}{6{,}32}} = 1{,}78\ \text{s} \rightarrow P_{Ff_2} = -\frac{\mu m_2 g d}{\Delta t} = -\frac{0{,}1 \cdot 0{,}5 \cdot 10 \cdot 10}{1{,}78} = -2{,}81\ W$$

**Metoda 2**

$P_{Ff_2} = -\frac{\mu m_2 g d}{\Delta t} = -\mu m_2 g \cdot \frac{d}{\Delta t} \rightarrow v_{med}$ pe distanta $d$

$v_{med} = \frac{v_i + v_f}{2} = \frac{0+v}{2} = \frac{v}{2}$ viteza $v$ o putem afla din T.E.C. (pe distanța $d$)

$\frac{(m_1+m_2)v^2}{2} = \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_{F_f}$ unde $\mathcal{L}_F = 173$ J și $\mathcal{L}_{F_f} = -15$ J

$$v = \sqrt{\frac{2(\mathcal{L}_F - |\mathcal{L}_{Ff}|)}{m_1 + m_2}} = 11{,}24\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \rightarrow v_{med} = \frac{11{,}24}{2}$$

$$P_{Ff_2} = -0{,}1 \cdot 0{,}5 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \frac{11{,}24}{2} = -2{,}81\ W$$

d) $v' = ?$

Dacă am aflat accelerația sistemului, aplicăm formula lui Galilei:

$$(v')^2 = v_0^2 + 2aD \rightarrow v' = \sqrt{2aD} = \sqrt{2 \cdot 6{,}32 \cdot 20} = 15{,}9\frac{m}{s}$$

## II.2. Testul 2

**Se consideră acceleraţia gravitaţională $g$ = 10m/s$^2$.**

**<u>SUBIECTUL I</u>**

**<u>Pentru itemii 1-5 trebuie aleasă litera corespunzătoare răspunsului considerat corect.</u>**

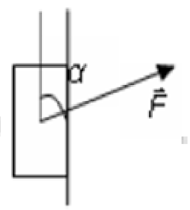
**1.** Despre vectorul viteză instantanee se poate afirma că:
**a.** este perpendicular pe traiectorie la fiecare moment de timp;
**b.** are întotdeauna direcţia vectorului viteză medie;
**c.** este tangent la traiectorie la fiecare moment de timp;
**d.** nu există nicio regulă cu privire la orientarea în spaţiu.

**2.** Ţinând seama că notaţiile sunt cele utilizate în manualele de fizică, unitatea de măsură a puterii mecanice poate fi scrisă în forma:
**a.** kg ·m$^2$ · s; **b.** kg ·m$^2$ · s$^{-3}$; **c.** kg ·m· s$^{-2}$; **d.** kg ·m· s$^{-1}$.

**3.** Ştiind că simbolurile mărimilor fizice şi ale unităţilor de măsură sunt cele utilizate în manualele de fizică, expresia corectă pentru coeficientul de frecare este:
**a.** $\mu = \vec{F}_f / \vec{N}$; **b.** $\mu = N / F_f$; **c.** $\mu = \vec{N} / \vec{F}_f$; **d.** $\mu = F_f / N$.

**4.** Un corp cade liber pe verticală de la înălţimea $H$ faţă de sol. Considerăm că energia potenţială gravitaţională este nulă la nivelul solului. În absenţa frecărilor, la o înălţime $h = H/4$, energia cinetică a corpului va reprezenta o fracţiune din energia mecanică iniţială egală cu:
**a.** 12,5%; **b.** 25%; **c.** 50%; **d.** 75%.

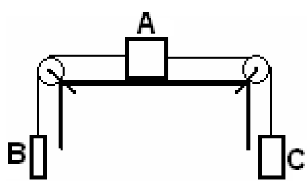
**5.** Asupra unui corp de masă $m$, aflat în contact cu un perete vertical, acţionează o forţă $\vec{F}$ care formează cu verticala unghiul $\alpha$ = 60°, ca în figura alăturată. Corpul urcă de-a lungul peretelui cu viteză constantă. Cunoscând valoarea coeficientului de frecare la alunecare dintre corp şi perete, $\mu = 0{,}29\ \left(\cong 1/(2\sqrt{3})\right)$, modulul forţei $\vec{F}$ are expresia:




**a.** $F = mg/3$; **b.** $F = 4mg/3$; **c.** $F = 3mg/2$; **d.** $F = 4mg$.

**<u>SUBIECTUL II</u> - Rezolvaţi următoarea problemă:**

Pe o suprafaţă orizontală se află un corp $A$ de masă $m_1$ , legat prin fire inextensibile şi de masă neglijabilă de corpurile $B$ şi $C$. Firele sunt trecute peste scripeţi ideali (fără frecare şi lipsiţi de inerţie) ca în figura alăturată. Masa corpului $B$ este $m_2$ iar a corpului $C$ este $m_3$. Lăsat liber sistemul se deplasează accelerat (corpul C urcă). Coeficientul de frecare între corpul $A$ şi suprafaţa orizontală este $\mu$ .



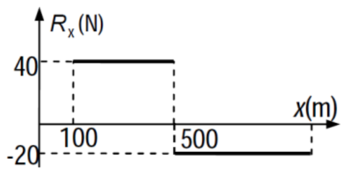

**a.** Reprezentaţi toate forţele ce acţionează asupra corpurilor $A$ ,$B$ şi $C$.
**b.** Deduceţi expresia acceleraţiei sistemului în funcţie de $m_1$, $m_2$, $m_3$, $g$ şi $\mu$.

**c.** Calculaţi valoarea forţei de tensiune din firul care leagă corpurile *A* şi *B* în cazul în care $m_1$ = 1kg, $m_2$ = 5kg, $m_3$ = 2kg şi $\mu$ = 0,2.

**d.** Considerând valorile numerice de mai sus, calculaţi cea mai mică valoare pe care o poate avea masa unui corp suplimentar care ataşat corpului *C* determină mişcarea sistemului cu viteză constantă.

**<u>SUBIECTUL III</u> - Rezolvaţi următoarea problemă:**

Un corp cu masa $m$ = 5 kg, aflat iniţial în repaus, începe să alunece cu frecare de-a lungul axei O$x$, din punctul de coordonată $x_0$ = 100 m, sub acţiunea unei forţe de tracţiune orientate în lungul acestei axe. Când corpul ajunge în punctul de coordonată $x_1$ = 500 m, forţa de tracţiune îşi încetează acţiunea. Forţa de frecare este constantă pe tot parcursul mişcării. În figura alăturată este reprezentată dependenţa de coordonata $x$ a rezultantei $R_x$ a forţelor ce acţionează pe direcţia mişcării. Determinaţi:




**a.** modulul forţei de tracţiune;

**b.** puterea dezvoltată de motorul care asigură forţa de tracţiune dacă durata acţiunii acesteia este $\Delta t$ = 10s;

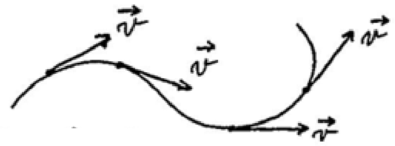
**c.** viteza $v_1$ a corpului în momentul încetării acţiunii forţei de tracţiune;

**d.** viteza $v_2$ a corpului în momentul în care acesta se află în punctul de coordonată $x_2$ = 850 m.

# Rezolvare test 2

## SUBIECTUL I

1. Vectorul viteză este tangent la traiectorie în fiecare punct al acesteia.



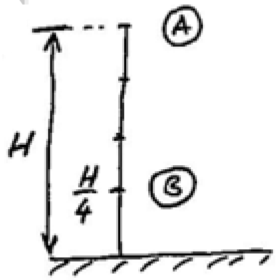
**Răspuns: c.**

2. $[P]_{SI} = \frac{[L]}{[t]} = \frac{[F]\cdot[l]}{[t]} = \frac{[m]\cdot[a]\cdot[l]}{[t]} = \frac{kg\cdot\frac{m}{s^2}\cdot m}{s} = kg\cdot m^2\cdot s^{-3}$

**Răspuns: b.**

3. $F_f = \mu N \rightarrow \mu = \frac{F_f}{N}$ **Răspuns: d.**

4. Scriem ecuația conservării energiei mecanice între stările A și B:




$E(A) = E(B) \rightarrow E(A) = mgH$

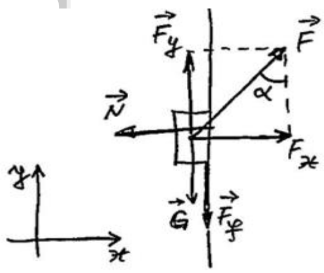
$E(B) = E_p(B) + E_C(B) = mgh_B + E_c(B) = mg\frac{H}{4} + E_c(B)$

$mgH = \frac{mgH}{4} + E_c(B) \rightarrow E_c(B) = mgH - \frac{mgH}{4} = \frac{3}{4}mgH = \frac{3}{4}E(A)$

$E_c(B)$ este 75% din $E(A)$

**Răspuns: d.**

5. Corpul urcă în $\vec{v} =$ constant $\rightarrow \vec{a} = 0$, deci rezultatele forțelor pe $x$ și $y$ trebuie să fie 0.



Pe $x$: $0 = F_x - N \rightarrow N = F_x = Fsin\alpha \rightarrow F_f = \mu N = \mu Fsin\alpha$

Pe $y$: $0 = F_y - G - F_f = Fcos\alpha - mg - \mu Fsin\alpha$

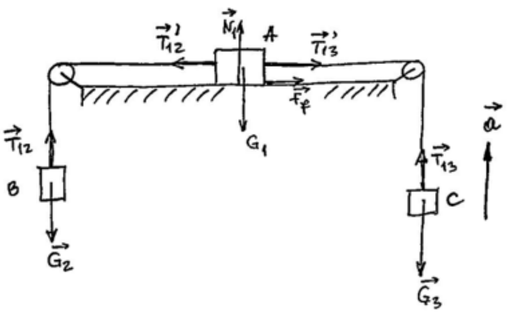
$\rightarrow F(cos\alpha - \mu sin\alpha) = mg \rightarrow F = \frac{mg}{cos\alpha - \mu sin\alpha}$

Dar $\mu = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ și $\alpha = 60°$, deci $sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ și $cos\alpha = \frac{1}{2} \rightarrow F = \frac{mg}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4\,mg$

**Răspuns: d.**

## SUBIECTUL II

a) Sistemul se mișcă în sensul indicat, deci $\vec{F_f}$ va avea sensul din figură.



b) Pentru a afla accelerația sistemului scriem ecuația principiului II pentru tot sistemul (fără tensiuni).

$$(m_1 + m_2 + m_3)\vec{a} = \overrightarrow{G_2} + \overrightarrow{G_1} + \overrightarrow{N_1} + \overrightarrow{F_f} + \overrightarrow{G_3} \to (m_1 + m_2 + m_3)a = m_2 g - \mu m_1 g - m_3 g$$

$$a = \frac{m_2 - \mu m_1 - m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \cdot g \to a = 3{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

c) Pentru a afla tensiunea $T_{12}$ scriem ecuația principiului II pentru corpul $m_2$:

$$m_2\vec{a} = \overrightarrow{G_2} + \overrightarrow{T_{12}} \to m_2 a = T_{12} + m_2 g \to T_{12} = m_2(g - a) = 32{,}5\ \mathrm{N}$$

Pentru a afla tensiunea $T_{13}$ scriem ecuația principiului II pentru corpul $m_3$:

$$m_3\vec{a} = \overrightarrow{G_3} + \overrightarrow{T_{13}} \to m_3 a = T_{13} - m_3 g \to T_{13} = m_3(g + a) = 27\ \mathrm{N}$$

d) Dacă corpul C urcă cu viteză constantă:

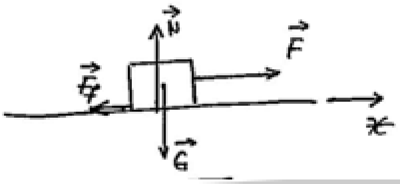
$$\left.\begin{aligned} &0 = m_2 g - \mu m_1 g - m_3' g \to m_3' = m_2 - \mu m_1 \\ &m_3' = m_3 + \Delta m' \end{aligned}\right\} \Delta m' = m_2 - \mu m_1 - m_3 = 2{,}8\ \mathrm{kg}$$

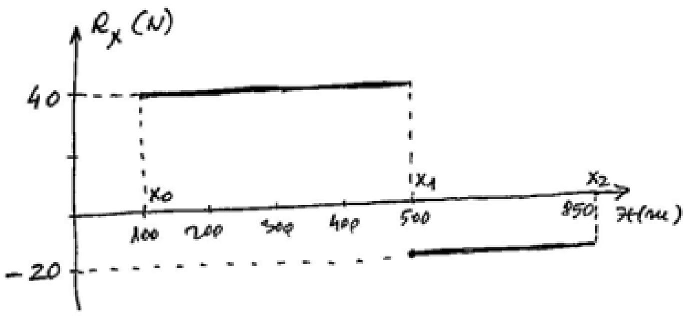
Dacă corpul C coboară cu viteză constantă:

$0 = m_3'' g - -\mu m_1 g - m_2 g \to m_3'' = m_2 + \mu m_1$ și observăm că $m_3'' > m_3'$, deci cea mai mică valoare a masei suplimentare este 2,8 kg.

**SUBIECTUL III**

a) $R_x = F - F_f = \cancel{F - \mu m g}$ (nu avem nevoie)




Deoarece la $x_1 = 500$ m forța de tracțiune își încetează acțiunea, în continuare mai acționează doar $F_f$.

Din grafic $\to |F_f| = 20\ \mathrm{N} \to F = R_x + F_f = 40 + 20 = 60\ \mathrm{N}$

b) $P_t = \frac{F \cdot \Delta t}{\Delta t} = \frac{60N \cdot 400m}{10s} = 2400\ \mathrm{W}$

c) Folosim tot T.E.C. $\frac{m v_1^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2} = \mathcal{L}_{total} = R_x \cdot \Delta x$

$$v_1^2 = \frac{2R_x \cdot \Delta x}{m} \to v_1 = \sqrt{\frac{2R_x \cdot \Delta x}{m}} = 80\frac{m}{s}$$

d) Folosim tot T.E.C. între $x_1$ și $x_2$:

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \mathcal{L}_{Ff}(1 \to 2) \to \frac{mv_2^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \mathcal{L}_{Ff}(1 \to 2) \Big| \cdot \frac{2}{m}$$

$$v_2^2 = v_1^2 + \frac{2}{m} \cdot \mathcal{L}_{Ff}(1 \to 2) \to v_2 = \sqrt{v_1^2 + \frac{2}{m} \mathcal{L}_{Ff}(1 \to 2)} = 60\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$\mathcal{L}_{Ff}(1 \to 2) = -F_f \cdot \Delta x_{1\to 2} = -20 \cdot 350 = -7000\ \mathrm{J}$$

Adresă poștală: Bd. Vasile Pârvan nr. 4, cod poștal 300223, Timișoara, jud. Timiș, România
Număr de telefon: +40-(0)256-592.697
Adresă de e-mail: edu@e-uvt.ro
Website: www.uvt.ro

## II.3. Testul 3

**Se consideră acceleraţia gravitaţională $g$ = 10m/s$^2$.**

**SUBIECTUL I**
**Pentru itemii 1-5 trebuie aleasă litera corespunzătoare răspunsului considerat corect.**

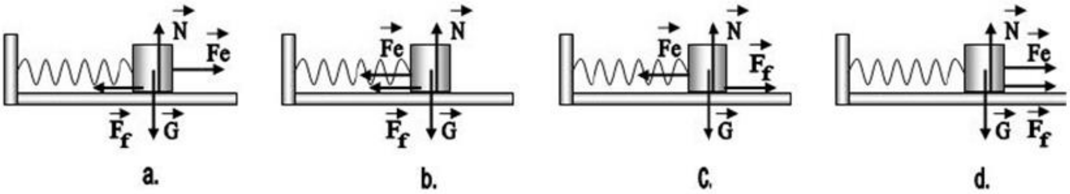
**1.** Un motociclist care se deplasează rectiliniu parcurge succesiv distanţele $d_1 = 50$m şi $d_2 = 75$m în intervalele de timp $\Delta t_1 = 4$s şi respectiv $\Delta t_2 = 6$s. Viteza medie a motociclistului pe porţiunea de traiectorie considerată este:

**a.** 30km/h; **b.** 36km/h; **c.** 45km/h; **d.** 54km/h.

**2.** Un corp cu masa $m$ atârnat de cablul unei macarale este coborât cu acceleraţia $\vec{a}$ orientată în jos. Dacă se neglijează masa cablului, valoarea forţei de tensiune din cablu se poate determina cu ajutorul expresiei:

**a.** $m \cdot (g - a)$; **b.** $m \cdot (g + a)$; **c.** $m \cdot g$; **d.** $m \cdot a$.

**3.** Forţele care acţionează asupra unui corp aflat în repaus, legat de un resort alungit, aflat pe o suprafaţă orizontală cu frecare, sunt reprezentate corect în figura:




**4.** Un corp este ridicat uniform pe un plan înclinat care formează unghiul α cu orizontala. Coeficientul de frecare la alunecare dintre corp şi planul înclinat fiind μ , randamentul planului înclinat este:

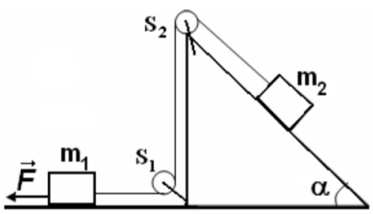
**a.** $tg\alpha/(1+\mu \cdot tg\alpha)$; **b.** $1/(tg\alpha + \mu)$; **c.** $1/(1+\mu \cdot tg\alpha)$; **d.** $tg\alpha/(tg\alpha + \mu)$.

**5.** Un corp se deplasează cu viteză constantă pe o suprafaţă orizontală sub acţiunea unei forţe de tracţiune orizontale $\vec{F}_t$, parcurgând distanţa $d$ . Notaţiile fiind cele din manuale, lucrul mecanic efectuat de forţa de frecare la alunecare se poate exprima prin:

**a.** $L = \mu \cdot N \cdot d \cdot \cos 0$; **b.** $L = -F_t \cdot d$; **c.** $L = -F_f \cdot d \cdot \cos 180°$; **d.** $L = F_t \cdot d$;

**SUBIECTUL II** - **Rezolvaţi următoarea problemă:**

Un sistem format din două corpuri de mase $m_1 = 2$kg şi $m_2 = 0{,}5$kg, legate printr-un fir inextensibil şi de masă neglijabilă, se poate deplasa cu frecare sub acţiunea forţei de tracţiune $F = 10$N, paralelă cu suprafaţa orizontală, ca în figură. Coeficienţii de frecare la alunecare ai celor două corpuri cu suprafaţa orizontală, respectiv cu suprafaţa planului înclinat au aceeaşi valoare, $\mu = 0{,}2$. Scripeţii sunt ideali, greutatea firului este neglijabilă, iar

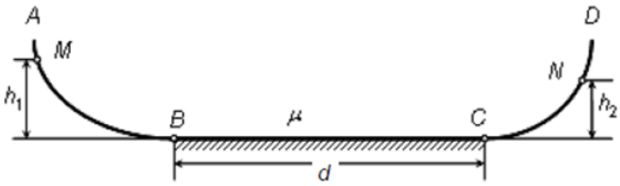


planul înclinat este suficient de lung şi formează unghiul $\alpha = 45^0$ cu orizontala.

**a.** reprezentaţi toate forţele ce acţionează asupra sistemului de corpuri;
**b.** determinaţi valoarea acceleraţiei sistemului;
**c.** determinaţi valoarea forţei de tensiune din fir;
**d.** calculaţi valoarea forţei exercitate asupra axului scripetelui $S_1$ aflat la baza planului înclinat.

**<u>SUBIECTUL III</u> - Rezolvaţi următoarea problemă:**

O pistă de snowboard are forma din figura: două porțiuni curbe *AB* și *CD*, separate de o porțiune orizontală $BC = d = 12$ m. Un sportiv cu masa $m = 70$ kg coboară liber pe un snowboard, din punctul *M* al porțiunii curbe *AB* a pistei, punctul *M* aflându-se la înălțimea $h_1 = 2{,}45$ m față de orizontala *BC*.




Admițând că mișcarea pe cele două porțiuni curbe *AB* și *CD* se face fără frecare, ca pe porțiunea orizontală *BC* coeficientul de frecare la alunecare dintre snowboard și zăpadă este $\mu = 0{,}1$ și că trecerile de pe porțiunile curbe pe cea orizontală și invers se fac fără modificarea modulului vitezei, determinați:

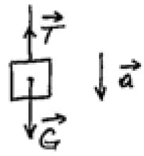
**a.** viteza $v_2$ cu care trece prima dată sportivul prin punctul *C*;
**b.** înălțimea $h_2$ a punctului *N* în care se oprește prima dată sportivul pe porțiunea *CD* a pistei;
**c.** lucrul mecanic efectuat de forțele de frecare de la începutul mișcării sportivului și până la oprirea sa definitivă;
**d.** distanța dintre punctul *B* și punctul în care se va opri definitiv sportivul.

# Rezolvare test 3

## SUBIECTUL I

1. $v_{med} = \frac{distanța\ parcursă}{timp} = \frac{d_1+d_2}{\Delta t_1+\Delta t_2} \rightarrow v_{med} = \frac{50m+75m}{4s+6s} = \frac{125m}{10s} = 12{,}5\frac{m}{s} = 12{,}5 \cdot \frac{\frac{1}{1000}}{\frac{1}{3600}} = 45\frac{km}{h}$

**Răspuns: c.**



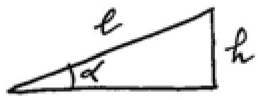

2. $ma = G - T \rightarrow T = G - ma = mg - ma = m(g-a)$

**Răspuns: a.**

3. Resortul fiind alungit, forța elastică tinde să scurteze resortul iar $\overrightarrow{F_f}$ are sens opus mișcării.

**Răspuns: c.**

4. $\eta = \frac{Lu}{Lc} = \frac{G\cdot h}{F_t\cdot l} = \frac{G\cdot h}{(G_t+F_h)\ell} = \frac{mgh}{(mg\sin\alpha+\mu mg\cos\alpha)\ell} = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha+\mu\cos\alpha}$



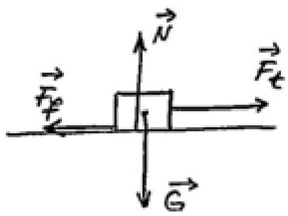

$\rightarrow \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\mu\cdot\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{tg\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\mu}$ **Răspuns: d.**

5. $v$= constant $\rightarrow a = 0$

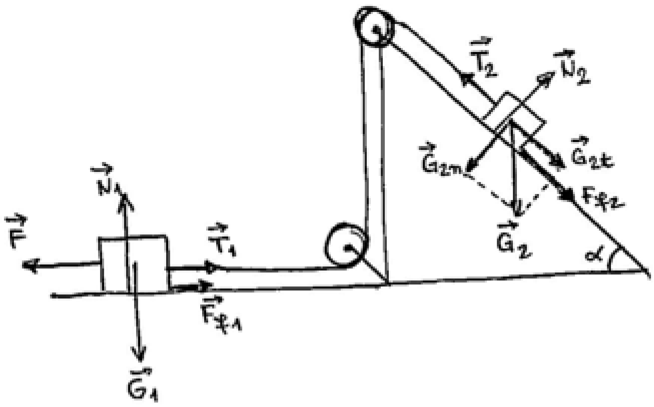
Din principiul II: $0 = F_t - F_f \rightarrow F_f = F_t$

$L_{F_f} = -F_f \cdot d = -F_t \cdot d$

**Răspuns: b.**




## SUBIECTUL II




a) $m_1 = 2kg;\ m_2 = 0{,}5kg; F = 10\text{N};\ \mu = 0{,}2;\ \alpha = 45°$

$\overrightarrow{G_{2t}}$ și $\overrightarrow{G_{2n}}$ nu trebuie reprezentate la punctul a).

$T_1 = T_2 = T$ tensiunea în fir are aceeași mărime în orice secțiune a firului.

b) Scriem ecuația principiului II pentru tot sistemul (deci nu vom mai scrie forțele interne, adică tensiunile, ci doar forțele externe):

$m_{sistem} \cdot \vec{a}_{sistem} = \Sigma \vec{F_i}^{ext}$

$\rightarrow (m_1 + m_2)\vec{a} = \vec{F} + \vec{G_1} + \vec{N_1} + \vec{F_{f_1}} + \vec{G_2} + \vec{N_2} + \vec{F_{f_2}}$

Unde, $\vec{G_1} + \vec{N_1} = 0$

$\vec{G_2} = \vec{G_{2_t}} + \vec{G_{2_n}}$

$\vec{N_2} = -\vec{G_{2_n}}$

$F_{f_2} = \mu n_2 = \mu G_2 n = \mu m_2 g cos\alpha$

$\rightarrow (m_1 + m_2)a = F - F_{f_1} - G_{t_2} - F_{f_2} = F - \mu m_1 g - m_2 g sin\alpha - \mu m_2 g cos\alpha$

$\rightarrow a = \dfrac{F - \mu m_1 g - m_2 g(sin\alpha + \mu cos\alpha)}{m_1 + m_2} \rightarrow a = 0{,}7 \dfrac{m}{s^2}$

c) Pentru a afla tensiunea în fir scriem ecuația principiului II pentru corpul 1:

$m_1\vec{a} = \vec{F} + \vec{G_1} + \vec{N_1} + \vec{F_{f_1}} + \vec{T_1}$

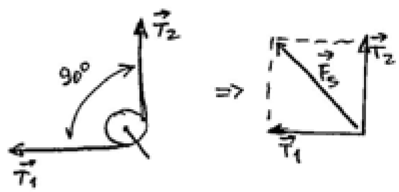
$m_1 a = F - F_{f_1} - T \rightarrow T = F - F_{f_1} - m_1 a = F - \mu m_1 g - m_1 a \rightarrow T = 4{,}6$ N

d)

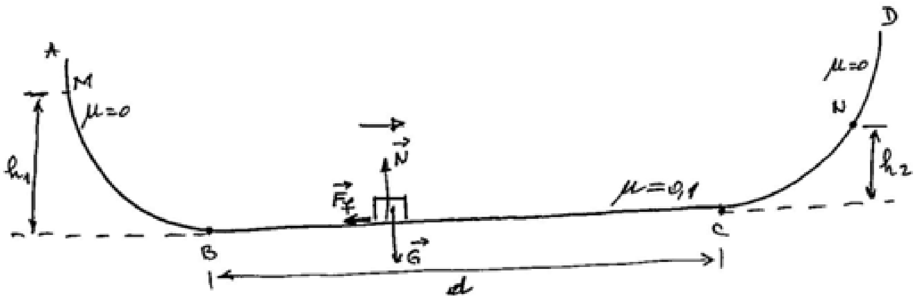
$\vec{F_S} = \vec{T_1} + \vec{T_2} \rightarrow F_S = \sqrt{T_1^2 + T_2^2 + 2T_1 T_2 \cos 90^0}$

$\rightarrow \sqrt{T^2 + T^2 + 2T^2 \cdot 0} = \sqrt{2T^2} = T\sqrt{2}$

$F_s = 6{,}48$ N




**SUBIECTUL III**




BC= $d$ =12 m; m = 70 kg; $h_1 = 2{,}45$ m

a) $v_2 = v_c$ (viteza în C, la prima trecere)

Se poate afla prin două metode:

- Conservarea energiei pe $M \rightarrow B$, din care va rezulta $v_b$, iar apoi se aplică T.E.C sau Galilei pe $B \rightarrow C$;

- Deoarece nu avem frecare pe MB, $\mathcal{L}_{F_f}(M \to B) = 0$, astfel este mai ușor să aplicăm T.E.C. pe traseul $M \to B \to C$.

$$E_c(C) - E_c(M) = \mathcal{L}_G(M \to B) + \mathcal{L}_G(BC) + \mathcal{L}_N(M \to B) + \mathcal{L}_N(B \to C) + \mathcal{L}_{F_f}(B \to C)$$

$$\frac{mv_c^2}{2} = mgh_1 - \mu mgd \to v_c = \sqrt{2g(h_1 - \mu d)} = 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) Deoarece nu există frecare pe $C \to N$ aplicăm conservarea energiei:

$$\left.\begin{aligned} &E(C) = E(N) \\ &E(C) = E_c(C) + E_p(C) = \frac{mv_c^2}{2} \\ &E(N) = E_c(N) + E_p(N) = mgh_2 \end{aligned}\right\} \qquad \frac{mv_c^2}{2} = mgh_2 \to h_2 = \frac{v_c^2}{2g} = 1{,}25\ \text{m}$$

c) Aplicăm din nou T.E.C. și notăm cu E punctul de oprire pe planul orizontal:

$$E_c(E) - E_c(C) = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_N + \mathcal{L}_{F_f} \to -\frac{mv_c^2}{2} = -\mu mgd' \to d' = \frac{v_c^2}{2\mu g} = 1{,}25\ \text{m}$$

Corpul depășește punctul B, înseamnă că va mai urca puțin și apoi se va întoarce în B cu aceeași viteză $v_B$. Dacă aflăm $v_B$ , dup întoarcere putem afla unde se oprește corpul pe planul orizontal.

$$E_c(B) - E_c(C) = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_N + \mathcal{L}_{F_f} \to \frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_C^2}{2} = -\mu mgd \to v_B = \sqrt{v_C^2 - 2\mu gd} = 1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La întoarcere în B corpul are tot $v_B = 1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ și $d'' = \frac{v_B^2}{2\mu g} = 0{,}5\ m$

$$\mathcal{L}_{tot,F_f} = \mathcal{L}_{F_f}(B \to C) + \mathcal{L}_{F_f}(C \to B) + \mathcal{L}_{F_f}(B \to E) = (-\mu mgd) + (-\mu mgd) + (-\mu mgd'') = -\mu mg(2d + d'') = -1715\ \text{J}$$

d) Am aflat deja BE = 0,5 m.

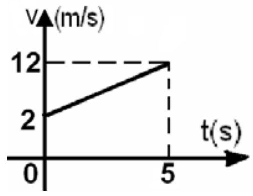
## II.4. Testul 4

**Se consideră acceleraţia gravitaţională $g$ = 10m/s$^2$.**

**SUBIECTUL I**

**Pentru itemii 1-5 trebuie aleasă litera corespunzătoare răspunsului considerat corect.**

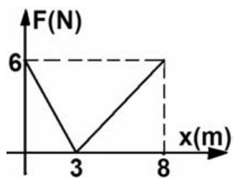
**1.** Asupra unui corp de masă m acţionează o forţă rezultantă constantă $F$ = 5N. În graficul alăturat este reprezentată dependenţa de timp a vitezei corpului. Masa corpului este:




**a.** 1,5 kg;
**b.** 2,5 kg;
**c.** 4,5 kg;
**d.** 7,5 kg.

**2.** Asupra unui corp de masă $m$ acţionează un sistem de forţe a cărui rezultantă este nulă. Afirmaţia corectă referitoare la mişcarea corpului este:
**a.** acceleraţia este pozitivă;
**b.** corpul este în repaus absolut;
**c.** corpul se mişcă circular;
**d.** vectorul viteză este constant.

**3.** În graficul alăturat este reprezentată dependenţa de coordonata $x$ a forţei care acţionează asupra unui punct material. Lucrul mecanic efectuat de această forţă la deplasarea punctului material pe primii 8 m pe axa $Ox$ şi în sensul forţei este:

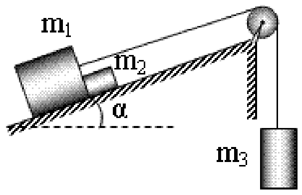



**a.** 6 J;
**b.** 12 J;
**c.** 24 J;
**d.** 30 J.

**4.** Ştiind că simbolurile mărimilor fizice şi ale unităţilor de măsură sunt cele utilizate în manualele de fizică, unitatea de măsură a mărimii exprimate prin produsul $F \cdot v$ este:
**a.** W; **b.** kg · s$^3$ / m$^2$; **c.** N · s / m; **d.** J · s.

**5**. Asupra unui corp de masă $m$ = 3 kg , aflat pe o suprafaţă orizontală, acţionează vertical în jos o forţă de valoare $F$ = 10 N. Forţa de apăsare exercitată de corp asupra planului are valoarea:
**a.** 10N; **b.** 30N; **c.** 40N; **d.** 50N.

**<u>SUBIECTUL II</u> - Rezolvaţi următoarea problemă:**




În sistemul de corpuri reprezentat schematic în figura alăturată, masele corpurilor sunt $m_1 = m_2 = 1$kg, respectiv $m_3 = 3$kg. Unghiul format de planul înclinat cu orizontala este $\alpha \cong 37°$ ($\sin\alpha = 0{,}6$). Sistemul este lăsat liber din repaus, iar corpurile de mase $m_1$ şi $m_2$ se deplasează cu frecare, coeficientul de frecare la alunecare dintre acestea şi planul înclinat fiind $\mu = 0{,}5$ . Firul este inextensibil şi de masă neglijabilă, iar scripetele este lipsit de frecare şi de inerție.

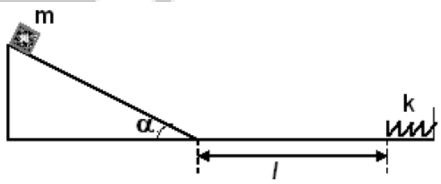
**a.** Reprezentați forțele care acționează asupra corpului de masă $m_2$ în timpul miscării.

**b.** Calculați valoarea forței cu care corpul de masă $m_1$ împinge corpul de masă $m_2$ .

**c.** Determinați valoarea forței de apăsare pe scripete.

**d.** Se dezleagă corpul de masă $m_3$ şi se trage de fir, vertical în jos, cu o forță $F$. Determinați **valorile** forței $F$ pentru care sistemul de corpuri $m_1$, $m_2$ se deplasează cu viteză constantă pe planul înclinat.

**<u>SUBIECTUL III</u> - Rezolvaţi următoarea problemă:**




Un corp de masă $m$=1kg, aflat iniţial în repaus, alunecă fără frecare din vârful unui plan înclinat de unghi $\alpha=30^0$ şi lungime $d$=10m. Mişcarea se continuă cu frecare pe un plan orizontal, coeficientul de frecare fiind $\mu$=0,25. Trecerea pe porţiunea orizontală se face lin, fără modificarea modulului vitezei. După ce corpul parcurge distanţa $l$=10m, loveşte un resort de constantă de elasticitate $k$ = 100N/m pe care îl comprimă şi se opreşte. Determinaţi:

**a.** energia mecanică totală a corpului atunci când se afla în vârful planului înclinat (se consideră energia potenţială gravitaţională nulă la baza planului înclinat);

**b.** energia cinetică a corpului la baza planului înclinat;

**c.** viteza corpului imediat înainte ca acesta să atingă resortul;

**d.** comprimarea maximă a resortului, neglijând frecarea pe timpul comprimării.

# Rezolvare test 4

## SUBIECTUL I

1. Am putea afla masa din ecuația principiului II, $ma = F \rightarrow m = \frac{F}{a}$, dar trebuie sp aflăm accelerația $a$. Din legea vitezei pentru mișcarea rectilinie uniform variată, $v_f = v_i + a(t_f - t_i)$.

$$a = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} \rightarrow m = \frac{F \cdot \Delta t}{\Delta v} = \frac{5 \cdot 5}{12 - 2} = 2{,}5\ kg$$

**Răspuns: b.**

2. Este enunțul principiului I. **Răspuns: d.**

3. Lucrul mecanic $L_{0\rightarrow 8}$ este egal cu aria cuprinsă între graficul forței și axa $x$:

$$L_{0\rightarrow 8} = L_{0\rightarrow 3} + L_{3\rightarrow 8} = \frac{3 \cdot 6}{2} + \frac{5 \cdot 6}{2} = 9 + 15 = 24\ \text{J}$$

**Răspuns: c.**

4. $F \cdot v = P$ (puterea) $\rightarrow [F \cdot v] = [P] = \text{W}$

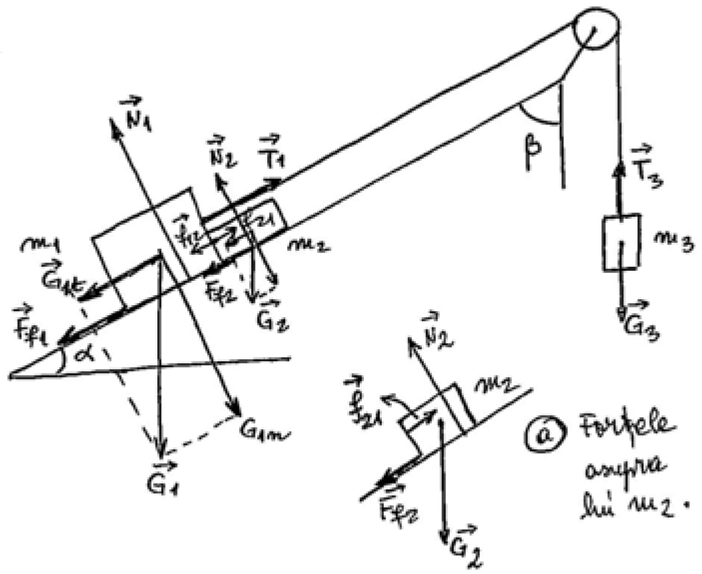
**Răspuns: a.**

5. Forța de apăsare asupra planului = $R_{plan} = G + F = mg + F = 3 \cdot 10 + 10 = 40\ \text{N}$

**Răspuns: c.**

## SUBIECTUL II

a)



b) Am notat cu $\overrightarrow{f_{21}}$ forța care acționează asupra corpului *z* din partea corpului 1. Perechea sa, $\overrightarrow{f_{12}}$ acționează asupra corpului 1 și conform principiului II, $\overrightarrow{f_{12}} = -\overrightarrow{f_{21}}$ . Pentru a afla mărimea forței $\overrightarrow{f_{21}}$ aplicăm principiul II:

$m_2\vec{a} = \overrightarrow{f_{21}} + \overrightarrow{G_2} + \overrightarrow{F_{f_2}} \rightarrow m_2 a = f_{21} - G_{2t} - F_{f_2} \rightarrow f_{21} = m_2 a + G_{2t} + F_{f_2}$

Unde, $G_{2t} = m_2 g sin\alpha$

$F_{f_2} = \mu m_2 g cos\alpha$

$f_{21} = m_2[a + g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)]$

$(m_1 + m_2 + m_3)\vec{a} = \overrightarrow{G_3} + \overrightarrow{G_1} + \overrightarrow{N_1} + \overrightarrow{F_{f_1}} + \overrightarrow{G_2} + \overrightarrow{N_2} + \overrightarrow{F_{f_2}}$

$(m_1 + m_2 + m_3)a = G_3 - G_{1t} - G_{2t} - F_{f_1} - F_{f_2}$

$0 = N_1 - G_{1n} \rightarrow F_{f_1} = \mu N_1 = \mu m_1 g cos\alpha$

$0 = N_2 - G_{2n} \rightarrow F_{f_2} = \mu N_2 = \mu m_2 g cos\alpha$

$\rightarrow (m_1 + m_2 + m_3)a = m_3 g - m_1 g sin\alpha - \mu m_1 g cos\alpha - m_2 g sin\alpha - \mu m_2 g cos\alpha$

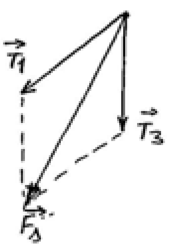
$\rightarrow m_3 g - m_1 g(sin\alpha + \mu cos\alpha) - m_2 g(sin\alpha + \mu cos\alpha)$

$= m_3 g - (sin\alpha + \mu cos\alpha)(m_1 g + m_2 g)$

$$\rightarrow a = \frac{m_3 - (m_1 + m_2)(sin\alpha + \mu cos\alpha)}{m_1 + m_2 + m_3} \cdot g \rightarrow a = 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$f_{21} = 12\ \text{N}$

c) $\overrightarrow{F_s} = \overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{T_3}$ , unde $T_1 = T_3 = T$




$F_s = \sqrt{T^2 + T^2 + 2T \cdot T \cdot cos\,\beta} = \sqrt{2T^2(1 + cos\,\beta)}$, unde $\beta = 90° - \alpha$

$cos\beta = \cos(90° - \alpha) = cos90° \cdot cos\alpha + sin90° \cdot sin\alpha = sin\alpha = 0{,}6$

$T$ se află aplicând principiul II pentru corpul 3:

$m_3\vec{a} = \overrightarrow{G_3} + \overrightarrow{T_3} \rightarrow m_3 a = G_3 + T_3 = m_3 g - T_3$

$\rightarrow T_3 = T = m_3(g - a) \rightarrow T = 24$

$F_s = 24\sqrt{3{,}2} = 42{,}93\ \text{N} \approx 43\ \text{N}$

d) Avem două cazuri:

1. Corpurile $m_1 + m_2$ urcă pe planul înclinat cu *v* = constantă $\rightarrow a = 0$

$0 = F_n - m_1 g sin\alpha - \mu m_1 g cos\alpha - m_2 g sin\alpha - \mu m_2 g cos\alpha$

$\rightarrow F_n = m_1 g(sin\alpha + \mu cos\alpha) + m_2 g(sin\alpha + \mu cos\alpha) = g(m_1 + m_2)(sin\alpha + \mu cos\alpha)$

$\rightarrow F_n = 20\ \text{N}$

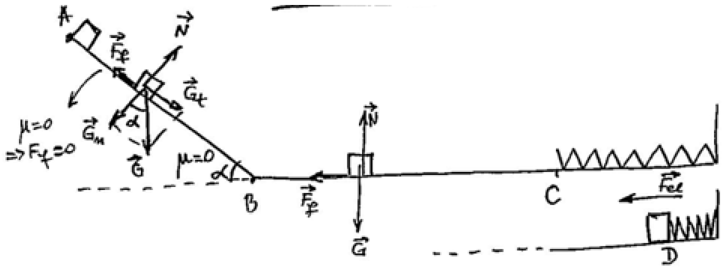
2. Corpurile $m_1 + m_2$ coboară pe planul înclinat și avem:

$0 = F_c + m_1 g sin\alpha + \mu m_1 g cos\alpha - m_2 g sin\alpha - \mu m_2 g cos\alpha$

$\rightarrow F_c = m_1 g(sin\alpha - \mu cos\alpha) + m_2 g(sin\alpha - \mu cos\alpha) = g(m_1 + m_2)(sin\alpha - \mu cos\alpha)$

$\rightarrow F_c = 4\ \text{N}$

**SUBIECTUL III**



a) $E(A) = E_p(A) + E_c(A) = mgh = mgdsin\alpha = 50$ J

b) $E_c(B) - E_c(A) = L_G + L_N + L_{F_f} \rightarrow E_c(B) = L_G = (mgsin\alpha) \cdot d = 50$ J

c) Pe porțiunea $B \rightarrow C$ avem frecare:

$$E_c(C) - E_c(B) = L_G + L_N + L_{F_f} = -\mu mg \cdot \ell$$

$$\rightarrow E_c(C) = E_c(B) - \mu mg \cdot \ell \rightarrow \frac{mv_c^2}{2} = E_c(B) - \mu mg \cdot \ell$$

$$\rightarrow v_c = \sqrt{\frac{2[E_C(B) + mg\ell]}{m}} \rightarrow v_c = 7{,}05\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

d) Comprimarea resortului, fără frecare între corp și plan se poate afla prin două metode:

$$E(C) = E(D) \rightarrow \frac{mv_c^2}{2} = \frac{k \cdot \Delta\ell^2}{2} \rightarrow \Delta\ell = v_c\sqrt{\frac{m}{k}} = 0{,}7\ \text{m}$$

sau

$$E_c(D) - E_c(C) = L_{\ell\ell} \rightarrow -\frac{mv_c^2}{2} = -\frac{k \cdot \Delta\ell^2}{2}$$

## II.5. Testul 5

**Se consideră acceleraţia gravitaţională $g$ = 10m/s$^2$.**

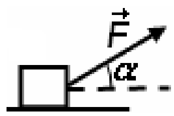
**SUBIECTUL I**

**Pentru itemii 1-5 trebuie aleasă litera corespunzătoare răspunsului considerat corect.**

**1.** Variaţia energiei cinetice a unui corp asupra căruia acţionează un sistem de forţe este întotdeauna egală cu:

**a.** energia potenţială în starea finală;
**b.** zero;
**c.** lucrul mecanic efectuat de rezultanta sistemului de forţe în timpul acestei variaţii;
**d.** forţa rezultantă a sistemului de forţe care acţionează asupra corpului.

**2.** Un copil trage cu o forţă $F$ = 10N de o sanie pe care o deplasează cu viteză constantă, pe un drum orizontal. Forţa formează un unghi α = 60° cu direcţia deplasării, ca în figura alăturată. Forţa de frecare dintre sanie şi zăpadă are valoarea:




**a.** 5 N; **b.** 10 N; **c.** 20 N; **d.** 40 N.

**3.** Expresia randamentului unui plan înclinat este:

**a.** $\eta = \frac{1}{1+\mu \operatorname{tg}\alpha}$; **b.** $\eta = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\mu(1+\mu \operatorname{ctg}\alpha)}$; **c.** $\eta = \frac{1}{1+\mu \operatorname{ctg}\alpha}$; **d.** $\eta = \frac{\mu}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}$.

**4.** Două corpuri având masele $m_1$ = 20 kg şi $m_2$ = 10 kg, legate între ele printr-un fir ideal, sunt aşezate pe un plan orizontal. Corpurile se deplasează cu viteză constantă sub acţiunea unei forţe orizontale $F$ = 60 N care trage de corpul cu masa $m_2$. Coeficientul de frecare la alunecare este acelaşi pentru ambele corpuri. Forţa de tensiune din fir are valoarea:

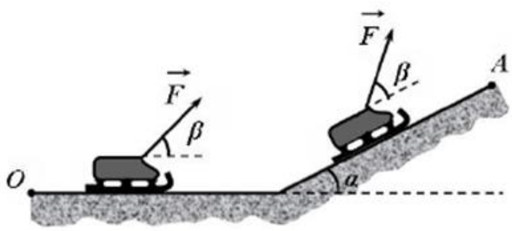
**a.** 10 N; **b.** 20 N; **c.** 25 N; **d.** 40 N.

**5**. Legea conservării energiei mecanice totale pentru un sistem izolat, ale cărui corpuri interacţionează prin forţe conservative, este:

**a.** $E_c + E_p$ = constant; **b.** $\Delta E_c = -L$; **c.** $\Delta E_p = L$; **d.** $F = ma$.

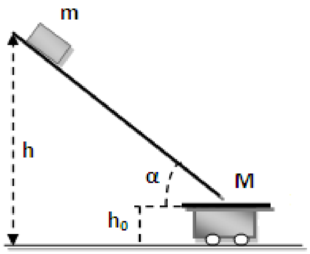
**SUBIECTUL II - Rezolvaţi următoarea problemă:**

Un muncitor trage o sanie încărcată de masă $m$ = 20 kg cu o forţă $\vec{F}$, deplasând-o din punctul $O$ până în punctul $A$ aflat în vârful unei pante de unghi $\alpha = 30^0$, ca în figura alăturată. Direcţia forţei $\vec{F}$ face cu direcţia deplasării saniei, atât pe drumul orizontal cât şi pe pantă, unghiul $\beta = 45^0$. Mişcarea saniei se face cu frecare, pe întreg parcursul coeficientul de frecare la alunecare fiind $\mu$ = 0,1. Determinaţi:



**a.** acceleraţia saniei pe planul orizontal, dacă valoarea forţei este $F = 100$ N;
**b.** valoarea forţei $F$ sub acţiunea căreia sania urcă uniform pe pantă;
**c.** valoarea minimă a forţei $F$ pentru care sania nu apasă pe pantă;
**d.** acceleraţia saniei pe pantă în condiţiile în care valoarea forţei este $F = 200$ N.

**<u>SUBIECTUL III</u> - Rezolvaţi următoarea problemă:**



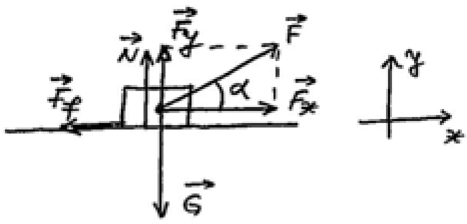

Un sac cu masa $m = 10$kg , aflat inițial în repaus la înălţimea $h = 16$m faţă de suprafaţa solului, alunecă pe un jgheab înclinat cu unghiul $\alpha = 30°$ faţă de orizontală. Capătul inferior al jgheabului se află la înălţimea $h_0 = 1$m faţă de sol. La baza jgheabului se află un vagonet de masă $M = 50$kg, aflat inițial în repaus, ca în figura alăturată. Când ajunge la baza jgheabului, sacul cade pe platforma vagonetului. După impact sacul rămâne pe vagonet. Se neglijează frecările dintre vagonet şi sol. Energia potenţială gravitaţională este nulă la nivelul solului. Determinaţi:
**a.** energia mecanică a sacului la momentul inițial;
**b.** lucrul mecanic efectuat de forța de frecare dintre sac şi jgheab, dacă viteza sacului la baza jgheabului este $v = 10$m/s;
**c.** mărimea forţei de frecare la alunecare dintre sac şi jgheab;
**d.** valoarea vitezei pe care o capătă vagonetul după căderea sacului pe platforma vagonetului, în condiţiile de la punctul **b**.

# Rezolvare test 4

## SUBIECTUL I

1. $\Delta E_c = L_{tot}$ (teorema variației enrgiei cinetice). **Răspuns: c.**

2. $v$ = constant $\sum_i \vec{F_i} = 0$ (principiul I)




$$\vec{G} + \vec{N} + \vec{F} + \vec{F_f} = 0 \rightarrow Pe\ x: \vec{F_x} + \vec{F_f} = 0$$
$$\rightarrow Pe\ y: \vec{G} + \vec{N} + \vec{F_y} = 0$$

Și scalar: $F_x - F_f = 0$

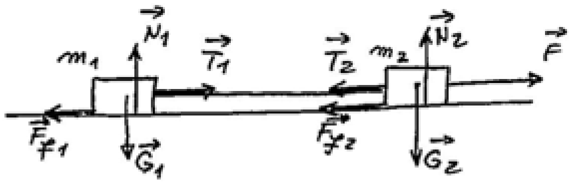
$$N + F_y - G = 0$$

$F_f = F_x = Fcos\alpha = 10 \cdot cos60° = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5$ N **Răspuns: a.**

3. $\eta = \frac{Lu}{Lc} = \frac{G \cdot h}{F_t \cdot \ell} = \frac{G \cdot h}{(G_t + F_f)\ell} = \frac{mgh}{(mgsin\alpha + \mu mgcos\alpha)\ell} = \frac{sin\alpha}{sin\alpha + \mu cos\alpha} = \frac{tg\alpha}{tg\alpha + \mu} = \frac{1}{1 + \mu ctg\alpha}$

**Răspuns: c.**

4. Corpurile se mișcă cu viteză constantă, deci accelerația lor este zero.




Pentru corpul 1: $\vec{G_1} + \vec{N_1} + \vec{F_{f_1}} + \vec{T_1} = 0$

$$\rightarrow T - \mu m_1 g = 0$$

Pentru corpul 2: $\vec{G_2} + \vec{N_2} + \vec{F_{f_2}} + \vec{T_2} = 0 \rightarrow$

$$F - \mu m_2 g - T = 0$$

$$T = \mu m_1 g \rightarrow F - \mu(m_1 + m_2)g = 0 \rightarrow \mu = \frac{F}{(m_1 + m_2)g}$$

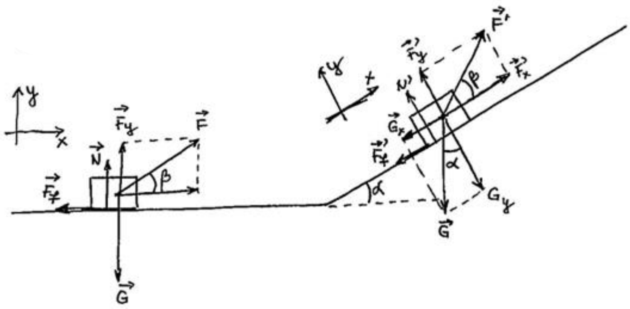
$$\rightarrow T = \frac{F}{(m_1 + m_2)g} \cdot m_1 g = \frac{F m_1}{m_1 + m_2} = \frac{60 \cdot 20}{20 + 10} = 40 \text{ N}$$

**Răspuns: d.**

5. Conservarea energiei mecanice: $E_c + E_p = constant$

**Răspuns: a.**

**SUBIECTUL II**



a) Accelerația a pe planul orizontal dacă F = 100 N, se aplică principiul II:

$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F_f}$

Pe x: $ma = F_x - F_f$

Pe y: $0 = N + F_y - G \rightarrow N = G - F_y = mg - Fsin\beta$

$\rightarrow F_f = \mu N = \mu(mg - Fsin\beta)$

$\rightarrow ma = Fcos\beta - \mu(mg - Fsin\beta) = F(cos\beta + \mu sin\beta) - \mu mg$

$\rightarrow a = \dfrac{F(cos\beta + \mu sin\beta)}{m} - \mu g \rightarrow a = 2{,}877\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

b) Dacă sania urcă uniform $\rightarrow a = 0$

$\rightarrow 0 = \vec{F} + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F_f}$

$\left.\begin{array}{l}\text{Pe x: } 0 = F'_x - G_x - F'_f \\ \text{Pe y: } 0 = F'_y + N' - G_y\end{array}\right\} \; 0 = F'sin\beta + N' - mgcos\alpha \rightarrow N' = mgcos\alpha - F'sin\beta$

$F'_f = \mu N' = \mu(mgcos\alpha - F'sin\beta)$

Revenim la ecuația pe x:

$0 = F'cos\beta - mgsin\alpha - \mu(mgcos\alpha - F'sin\beta)$

$\rightarrow F'(cos\beta + \mu sin\beta) = mg(sin\alpha + \mu cos\alpha)$

$\rightarrow F' = \dfrac{mg(sin\alpha + \mu cos\alpha)}{cos\beta + \mu sin\beta} = 151{,}25\ \mathrm{N}$

c) Dacă sania nu apasă pe planul înclinat $N' = 0$

De la punctul b) știm că $N' = mgcos\alpha - F'sin\beta$

$F'_{min} = \dfrac{mgcos\alpha}{sin\beta} = 245{,}4\ \mathrm{N}$

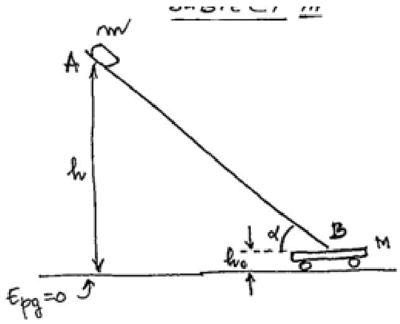
d) $ma' = F'_x - G_x - F'_f$

$\rightarrow Fcos\beta - mgsin\alpha - \mu(mgcos\alpha - Fsin\beta)$ am folosit notația din text (F fără ‘)

$\rightarrow F(cos\beta + \mu sin\beta) - mg(sin\alpha + \mu cos\alpha)$

$\rightarrow a' = \dfrac{F(cos\beta + \mu sin\beta)}{m} - g(sin\alpha + \mu cos\alpha)$

Adresă poștală: Bd. Vasile Pârvan nr. 4, cod poștal 300223, Timișoara, jud. Timiș, România
Număr de telefon: +40-(0)256-592.697
Adresă de e-mail: edu@e-uvt.ro
Website: www.uvt.ro




**SUBIECTUL III**

a) $E(A) = E_c(A) + E_p(A) = mgh = 1600\ \text{J}$

b) Folosim teoria variației energiei mecanice totale:

$E(B) - E(A) = L_{F_f}$ , unde $E(B) = \frac{mv_B^2}{2} + mgh_o$

$E(A) = mgh$

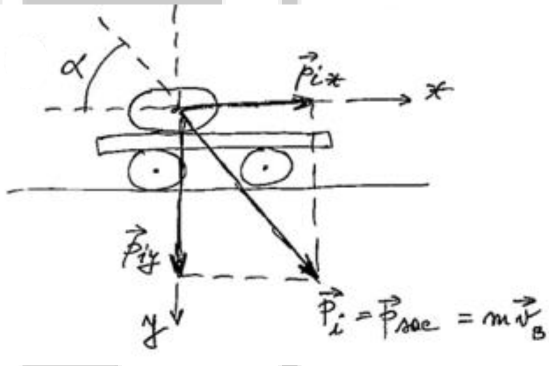
$$\frac{mv_B^2}{2} + mgh_o - mgh = L_{F_f} \rightarrow L_{F_f} = m\left[\frac{v_B^2}{2} - g(h - h_o)\right] = -1000\ \text{J}$$

c) $L_{F_f} = -F_f \cdot \ell \rightarrow F_f = -\frac{L_{F_f}}{\ell} = -\frac{(-1000)}{\ell} = +\frac{1000}{30} = 33{,}3\ \text{N}$

$$sin\alpha = \frac{h - h_o}{\ell} \rightarrow \ell = \frac{h - h_o}{sin\alpha} = \frac{16 - 1}{\frac{1}{2}} = 30\ \text{m}$$

d) Impulsul pe direcția x se conservă pentru că nu avem forțe externe care să acționeze asupra sacului și vagonetului pe direcția x.

$\overrightarrow{P_{i_x}} = \overrightarrow{P_{f_x}}$ (acestea sunt impulsuri ale sistemului sac + vagon)




$P_{i_x} = mv_B cos\alpha$

$P_{f_x} = (M + m)V$

$\rightarrow mv_B cos\alpha = (M + m)V$

$$\rightarrow V = \frac{mv_B cos\alpha}{M + m} = \frac{10 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{10 + 50} = 1{,}44\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$